Liviu BERETEU

FUNDAMENTE DE INGINERIE MECANICA

2010

1.Momentul unei forţe în raport cu un punct şi în raport cu o axă. Cuplu de forţe

Momentul unei forţe $\vec{F}$ în raport cu un punct O se defineşte ca fiind produsul vectorial dintre vectorul de poziţie $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ al punctului de aplicaţie al forţei si forţă: $\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F}$

Elementele caracteristice ale acestei mărimi vectoriale sunt: punctul de aplicaţie este chiar punctul de referinţă O; direcţia este perpendiculară pe planul determinat de cei doi vectori; sensul este determinat de regula burghiului drept, iar mărimea este: $M_0 = rF\sin\left(\vec{F},\vec{r}\right) = rF\sin\alpha = Fd$, unde d=rsinα se numeşte braţul forţei ($\alpha = \sphericalangle\left(\vec{F},\vec{r}\right)$).Unitatea de masură in SI pentru momentul forţei este Nm. Dacă se exprimă analitic cei doi vectori, raportaţi la sistemul Oxyz:

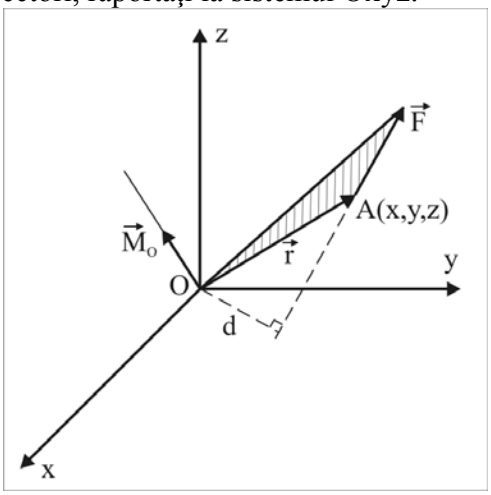


Fig. 1

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},\ \vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_y\vec{k},\ \text{atunci}\ \vec{M}_0 = \vec{r}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)\vec{i} + (zF_x - zF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)$$

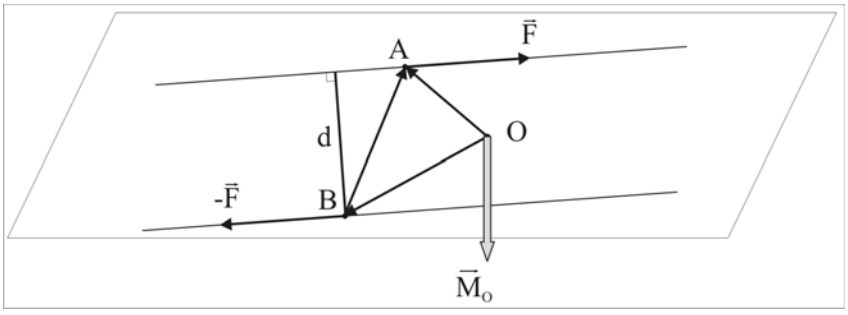


Fig. 2

Momentul unei forţe în raport cu o axă (Δ) se defineşte ca fiind proiecţia pe axă a momentului forţei calculat în raport cu acea axă. Dacă dreapta Δ face unghiurile α, β şi γ

faţă de axele sistemului Oxyz atunci versorul acestei axe este: $\vec{e} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$, iar

$M_\Delta = \vec{M}_O \cdot \vec{e} = M_{Ox}\cos\alpha + M_{Oy}\cos\beta + M_{Oz}\cos\gamma$.

Cuplul de forţe este format din două forţe egale ca mărime, de aceeaşi direcţie şi sensuri contrare, având suporturile paralele. Rezultanta acestui sistem de forţe este nulă, iar momentul cuplului este:

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OA}\times\vec{F} + \overrightarrow{OB}\times\left(-\vec{F}\right) = \left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right)\times\vec{F} = \overrightarrow{BA}\times\vec{F} = \overrightarrow{AB}\times\left(-\vec{F}\right)$$

Se constată că vectorul moment al cuplului este un vector liber, nu depinde de punctul în raport cu care se calculează. El este perpendicular pe cuplul de forţe, are semnul după regula burghiului drept şi valoarea $M_O = F\cdot AB\sin\alpha = F\cdot d$; distanţa d se numeşte braţul cuplului.

2.Reducerea unui sistem de forţe

Se consideră că asupra unui corp rigid acţionează o forţă, într-un punct A. Se pune problema determinării efectului acesteia într-un alt punct O (fig.)

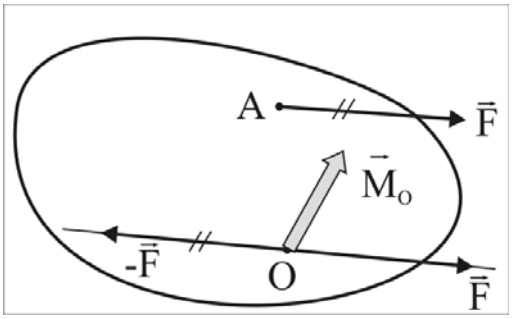


Fig. 1

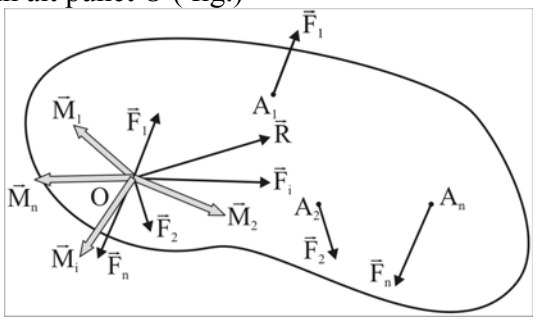


Fig.2

În punctul O se introduce un sistem echivalent cu zero, $\vec{F}$ şi $-\vec{F}$. S-a obţinut un cuplu de forţe format din forţa $\vec{F}$ cu punctul de aplicaţie în A şi forţa $-\vec{F}$ cu punctul de aplicaţie în O. Acest cuplu este echivalent cu un moment $\vec{M}_O = \overrightarrow{OA}\times\vec{F}$, deoarece rezultanta unui cuplu este nulă. Astfel, în punctul O s-a obţinut o forţă $\vec{F}$ identică cu forţa iniţială şi un cuplu a cărui moment este egal cu momentul forţei iniţiale calculat în raport cu punctul O.

Aceste două elemente $\left(\vec{F}, \vec{M}_O\right)$ formează torsorul de reducere al forţei $\vec{F}$ în raport cu punctul O.

Dacă asupra rigidului acţionează un sistem de n forţe, reducând fiecare forţă în punctul O, se va obţine în acest punct un sistem de forţe concurente şi un sistem de vectori concurenţi ai momentelor forţelor în raport cu punctul O. Prin urmare, se va obţine o rezultantă $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$ şi un moment rezultant:

$$\vec{M}_O = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \ldots + \vec{M}_n = \sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i = \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}\times\vec{F}_i .$$

Cele două elemente $\vec{R}$ şi $\vec{M}_O$ constituie torsorul de reducere al sistemului de forţe dat, în raport cu punctul O.

Dacă se exprimă analitic mărimile vectoriale $\vec{F}_i = F_{x_i}\vec{i} + F_{y_i}\vec{j} + F_{z_i}\vec{k}$, $\overrightarrow{OA_i} = x_i\vec{i} + y_i\vec{j} + z_i\vec{k}$, se obţine expresia analitică a rezultantei: $\vec{R} = \left(\sum_{i=1}^{n} F_{x_i}\right)\vec{i} + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{y_i}\right)\vec{j} + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{z_i}\right)\vec{k} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + R_z\vec{k}$, cu cele trei proiecţii pe axe

$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{x_i}$, $R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{y_i}$ şi $R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{z_i}$. Expresia analitică a momentului rezultant este :

$$\vec{M}_O = \sum \overrightarrow{OA_i} \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ F_{x_i} & F_{y_i} & F_{z_i} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i F_{z_i} - z_i F_{y_i}\right)\vec{i} + \sum_{i=1}^{n} \left(z_i F_{x_i} - x_i F_{z_i}\right)\vec{j} + \sum_{i=1}^{n} \left(x_i F_{y_i} - y_i F_{x_i}\right)\vec{k} = M_{Ox}\vec{i} + M_{Oy}\vec{j} + M$$

iar proiecţiile momentului rezultant pe axele sistemului Oxyz sunt:

$$M_{Ox} = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i F_{z_i} - z_i F_{y_i}\right),\ M_{Oy} = \sum_{i=1}^{n} \left(z_i F_{x_i} - x_i F_{z_i}\right) \text{ şi } M_{Oz} = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i F_{y_i} - y_i F_{x_i}\right)$$

3.Echilibrul corpului rigid liber şi supus la legături

Un corp rigid este liber dacă poate ocupa orice poziţie în spaţiu sub acţiunea forţelor exterioare.

Considerând că asupra unui astfel de corp acţionează sistemul de forţe exterioare $\vec{F}_i$, $i = \overline{1,n}$, pentru echilibrul său trebuie ca efectul acestui sistem de forţe să fie nul, adică elementele torsorului de reducere într-un punct să fie nule .

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$$

$$\vec{M}_O = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + ... + \vec{M}_n = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i} \times \vec{F}_i = 0$$

Ceea ce corespunde următoarelor ecuaţii scalare:

$$\begin{cases} R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{x_i} = 0, R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{y_i} = 0, R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{z_i} = 0 \\ M_{Ox} = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i F_{z_i} - z_i F_{y_i}\right) = 0, M_{Oy} = \sum_{i=1}^{n} \left(z_i F_{x_i} - x_i F_{z_i}\right) = 0, M_{Oz} = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i F_{y_i} - y_i F_{x_i}\right) = 0, \end{cases}$$

Aceste şase ecuaţii conduc la determinarea celor şase parametri care determină poziţia de echilibru a corpului.

În cazul corpului supus la legături, unele mişcări sunt împiedicate. Axioma legăturilor spune că în fiecare punct al corpului în care există o legătură aceasta poate fi înlocuită cu o forţă sau / şi moment care să aibă acelaşi efect ca şi legătura. Prin urmare, asupra corpului vor acţiona două sisteme de forţe : unul al forţelor exterioare $\vec{F}_i\left(i=1,2...n\right)$ cunoscute, respectiv al forţelor de legătură (reacţiuni) $\vec{F}_{jl}\left(j=1,2...p\right)$ necunoscute.

Dacă se reduc cele două sisteme de forţe într-un punct se obţine un torsor format din rezultanta forţelor exterioare şi de legătură, respectiv momentul rezultant al forţelor exterioare şi de legătură.

Pentru echilibru este necesar ca aceste elemente să fie nule

$$\begin{cases} \vec{R}_{ext}+\vec{R}_l=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i+\sum_{j=1}^{p}F_j=0 \\ \vec{M}_{Oext}+\vec{M}_{Ol}=\sum_{i=1}^{n}\left(\overrightarrow{OA_i}\times\vec{F}_i\right)+\sum_{j=1}^{p}\left(\overrightarrow{OB_j}\times\vec{F}_{jl}\right)=0, \end{cases}$$

unde B_j sunt punctele de aplicaţie ale forţelor de legătură, A_i sunt punctele de aplicaţie ale forţelor date (exterioare).

Aceste două ecuaţii vectoriale se proiectează pe axele unui sistem de referinţă Oxyz obţinându-se şase ecuaţii scalare. Din aceste ecuaţii scalare se pot determina forţele de legătură şi, dacă e cazul, şi poziţia de echilibru. Dacă numărul necunoscutelor este mai mare decât 6, problema e static nedeterminată. Dacă toate forţele exterioare sunt în plan numărul ecuaţiilor scalare ce se obţin sunt 3. Deci problema e static determinată dacă are 3 necunoscute. Cele mai importante legături sunt: rezemarea, care introduce o necunoscută (reacţiunea normală), articulaţia introduce 3 necunoscute;iar încastrarea introduce 6 necunoscute. Legătura cu fir introduce o singură necunoscută, valoarea efortului din fir, direcţia fiind în lungul firului. În cazul forţelor plane articulaţia introduce 2 necunoscute, iar încastrarea 3 necunoscute.

4.Studiul mişcării unui punct material în coordonate carteziene

Într-un sistem de coordonate carteziene Oxyz (Fig. 1), legea de mişcare a unui punct se exprimă sub forma $\vec{r}\left(t\right)=x\left(t\right)\vec{i}+y\left(t\right)\vec{j}+z\left(t\right)\vec{k}$

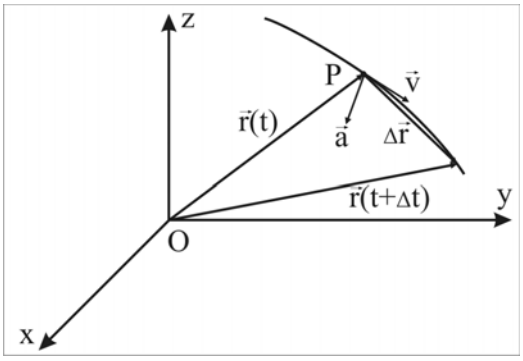


Fig. 1

Mişcarea punctului material se cunoaşte, dacă se cunoaşte poziţia acestuia în fiecare moment, adică coordonatele acestuia, ca funcţii de timp $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Aceste funcţii reprezintă ecuaţiile parametrice ale curbei pe care se mişcă punctul. Prin eliminarea timpului în aceste ecuaţii se obţin ecuaţiile implicite ale curbei $f_1(x,y,z) = 0$ şi $f_2(x,y,z) = 0$, adică două suprafeţe care intersectate dau curba amintită. Traiectoria reprezintă locul geometric descris de punctul material în mişcarea sa şi poate să coincidă cu întreaga curbă sau să fie numai o parte din curba obţinută prin ecuaţiile de mai sus.

Viteza medie, a punctului material se defineşte ca fiind $\vec{v}_m = \Delta\vec{r}/\Delta t$. Pentru obţinerea vitezei momentane se face $\Delta t \to 0$, deci $\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \dot{\vec{r}}(t)$. Se constată că viteza devine tangentă la traiectorie. Exprimarea în coordonate carteziene a vitezei este $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}$, de unde se obţin proiecţiile vitezei pe axele de referinţă $v_x = \dot{x}(t)$ $v_y = \dot{y}(t)$ $v_z = \dot{z}(t)$, iar modulul este $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$.

Acceleraţia medie se defineşte ca fiind $\vec{a}_m = \Delta\vec{v}/\Delta t$. Acceleraţia momentană se obţine pentru $\Delta t \to 0$, $\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$ având proiecţiile $a_x = \ddot{x}(t)$ $a_y = \ddot{y}(t)$ $a_z = \ddot{z}(t)$ şi modulul $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$

5.Mişcarea de rotaţie cu axă fixă a unui corp rigid. Legea de mişcare. Distribuţia de viteze şi acceleraţii.

Un corp rigid are mişcare de rotaţie cu axă fixă dacă două puncte ale sale rămân fixe în tot timpul mişcării. Dacă se consideră un al treilea punct P din corp acesta este determinat prin trei coordonate. Între coordonatele celor două puncte fixe şi coordonatele punctului P se pot scrie două relaţii de legătură date de distanţele dintre ele. Poziţia lui fiind determinată printro singură funcţie de timp. Prin urmare în mişcarea de rotaţie, corpul are un grad de libertate. Acesta se alege ca fiind unghiul dintre axele O_1x_1 si Ox, egal cu unghiul dintre axele O_1y_1 si Oy (Fig. 1). Deci legea de mişcare a unui corp cu axă fixă se exprimă prin relaţia $\theta = \theta(t)$.

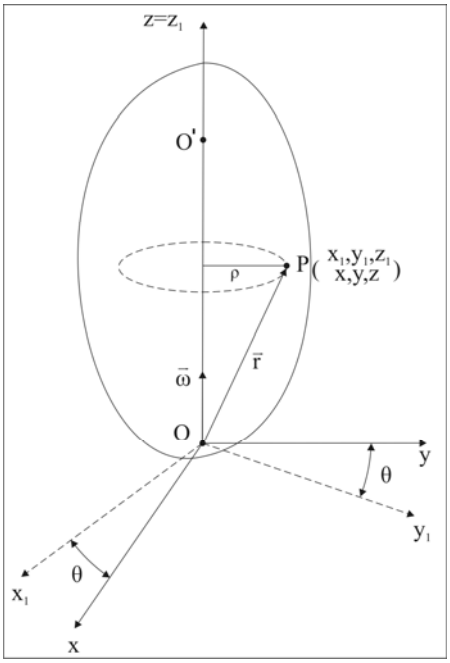


Fig. 1

Vectorul viteză unghiulară este dirijat în lungul axei de rotaţie şi este $\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{k} = \dot{\theta}\vec{k}_1$, adică are valoarea la un moment dat egală cu derivata în raport cu timpul a legii de mişcare. Punctul O fiind un punct fix $\vec{v}_O = 0$. Prin urmare se poate dezvolta produsul vectorial $\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j}$, ceea ce înseamnă că proiecţiile vitezei unui punct din corp pe axele sistemului legat de corp sunt: $v_x = -\omega y$, $v_y = \omega x$, $v_z = 0$. Se poate concluziona că viteza oricărui punct din rigid este situată într-un plan perpendicular pe axa de rotaţie $(v_z = 0)$. Singurele puncte de viteză nule sunt pe axa de rotaţie. Valoarea absolută este $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \omega \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = \omega \cdot R$ unde R este distanţa de la punctul considerat la axa de rotaţie . Reprezintă raza cercului descris de punctul P în mişcarea de rotaţie.

Pentru distribuţia de acceleraţii se are în vedere formula acceleraţiei unui punct în mişcarea generală a unui corp $\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$, unde $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$ este acceleraţia unghiulară, iar $\vec{a}_O = 0$, O fiind un punct fix.

Din această formulă se obţin proiecţiile acceleraţiei punctului considerat pe axele de coordonate ale sistemului Oxyz. $a_x = -\omega^2 x - \varepsilon y$, $a_y = \varepsilon x - \omega^2 y$, $a_z = 0$, iar valoarea este $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$

Se poate constata ca singurele puncte care au acceleraţia nulă sunt pe axa de rotaţie, iar acceleraţiile tuturor punctelor sunt situate în plane perpendiculare pe pe xa de rotaţie.

6.Mişcarea vibratorie. Definiţii şi noţiuni fundamentale

Mişcarea alternativă a unui sistem material faţă de o stare de referinţă se numeşte vibraţie sau oscilaţie. Mişcările vibratorii sunt periodice dacă toate elementele cinematice (poziţia, viteza şi acceleraţia) se repetă identic după un interval de timp T, numit perioadă. Cea mai simplă mişcare periodică este mişcarea a cărei ecuaţie (lege de mişcare) se exprimă prin funcţiile trigonometrice sinus sau cosinus şi se numeşte mişcare armonică $x = A_0 \sin(\omega t + \varphi)$ sau $x = A_0 \cos(\omega t + \psi)$.

Mărimile caracteristice ale unei vibraţii armonice sunt: elongaţia x, distanţa la un moment dat faţă de reper; cea mai mare elongaţie $x_{max} = A$ se numeşte amplitudine; perioada T, intervalul de timp după care mişcarea se repetă identic şi se determină ţinând seama că funcţia sinus are perioada unghiulară de 2π, deci $\sin(\omega t + \varphi) = \sin(\omega(t + T) + \varphi)$

sau $\omega t + \omega T + \varphi = \omega t + \varphi + 2\pi$ de unde $T = 2\pi/\omega$. Perioada se măsoară în secunde. Frecvenţa reprezintă numărul de vibraţii (oscilaţii) complete efectuate în unitatea de timp (secundă) $f = 1/T = \omega/2\pi$ unitatea de măsură pentru frecvenţă este $1Hz = 1/s = s^{-1}$. Pulsaţia ω reprezintă numărul de oscilaţii complete efectuate în 2π secunde. Legătura dintre frecvenţă şi pulsaţie este: $\omega = 2\pi f$. Pulsaţia se măsoară în rad/s.

Argumentul funcţiei sinus sau cosinus se numeşte fază $(\omega t + \varphi)$, iar φ este faza iniţială.

Viteza unei mişcări vibratorii se obţine prin derivarea în raport cu timpul a elongaţiei: $v = \dot{x} = A\omega\cos(\omega t + \varphi) = A\omega\sin(\omega t + \varphi + \pi/2)$.

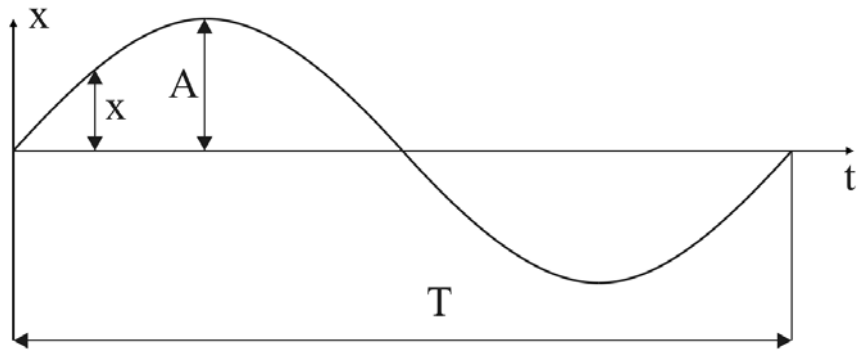
Se constată că amplitudinea vitezei este $v_{max} = A\omega$ şi că viteza este defazată cu $\pi/2$ faţă de mişcarea oscilatorie.

Acceleraţia unei mişcări vibratorii se obţine prin derivarea în raport cu timpul a vitezei $a = \dot{v} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi + \pi)$

Se constată ca acceleraţia este defazată cu π înainte faţă de mişcare şi cu $\pi/2$ înainte faţă de viteză.

Amplitudinea acceleraţiei este $a_{max} = \omega^2 A = 4\pi^2 f^2 A$. Din această expresie se poate observa ca în mişcările vibratorii pot apărea acceleraţii foarte mari, chiar dacă amplitudinea este mică, dacă frecvenţa este mare.

In Figura 1 se prezintă diagrama (graficul variaţiei în timp a legii de mişcare) pentru o mişcare vibratorie armonică, iar în Figura 2 este reprezentat cel mai simplu model mecanic care execută o mişcare armonică. Acesta este format dintr-un arc de constantă elastică k şi un corp de masă m.



7.Momente de inerţie mecanice. Definitii şi relaţii intre ele. Variaţia momentelor de inerţie în raport cu axe paralele (Formulele lui Steiner).

Momentele de inerţie arată modul în care este distribuită masa unui corp faţă de diferite elemente geometrice de referinţă: punct, axă, plan.

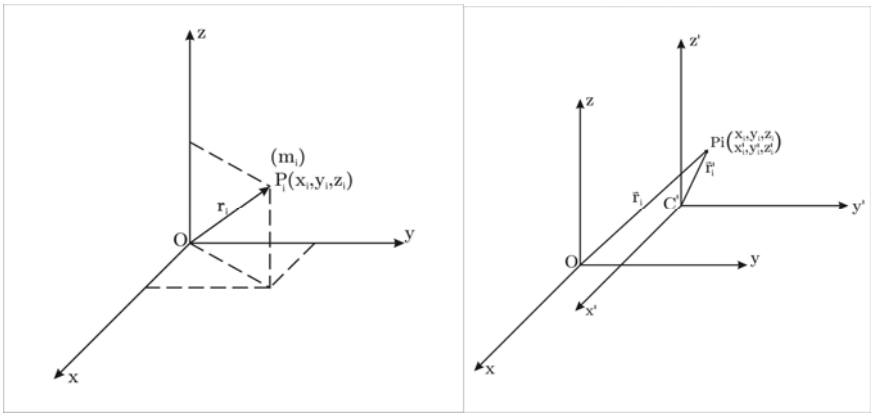


Fig. **Error! No text of specified style in document.**.

Fig.2

Faţă de sistemul Oxyz se pot defini următoarele momente de inerţie: momente de inerţie polare: $J_O = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \right)$, momente de inerţie axiale:

$$J_x = \sum_{i=1}^{N} m_i d_{ix}^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(y_i^2 + z_i^2 \right),\ J_y = \sum_{i=1}^{N} m_i d_{iy}^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_i^2 + z_i^2 \right),$$

$$J_z = \sum_{i=1}^{N} m_i d_{iz}^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_i^2 + y_i^2 \right)$$

momente de inerţie planare: $J_{xOy} = \sum_{i=1}^{N} m_i d_{ixOy}^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i z_i^2$, $J_{yOz} = \sum_{i=1}^{N} m_i d_{iyOz}^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i x_i^2$,

$$J_{xOz} = \sum_{i=1}^{N} m_i d_{ixOz}^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i y_i^2$$

Acestea se numesc momente de inerţie obişnuite, ele sunt expresii pătratice definite în funcţie de coordonatele punctelor.Faţă de momentele de inerţie obişnuite se mai definesc momente de inerţie centrifugale: $J_{xy} = \sum_{i=1}^{N} m_i x_i y_i$, $J_{yz} = \sum_{i=1}^{N} m_i y_i z_i$, $J_{zx} = \sum_{i=1}^{N} m_i z_i x_i$ Unitatea de măsură pentru toate momentele de inertie este kg.m^2. Se pot stabili uşor următoarele relaţii între momentele de inerţie $J_x + J_y + J_z = 2J_O$, $J_x + J_{yoz} = J_O$, $J_y + J_{xoz} = J_O$,

$J_z + J_{xoy} = J_O$, $J_{xOy} + J_{yOz} + J_{zOx} = J_O$, $J_{xOy} + J_{xOz} = J_x$, $J_{yOz} + J_{xOy} = J_y$, $J_{xOy} + J_{yOz} = J_z$

Aceste relaţii nu sunt independente, dar sunt utile pentru că determinând trei dintre ele pe baza acestor relaţii se determină celelalte patru.

Se consideră sistemul material raportat la un sistem de referinţă Oxyz şi la un sistem de referinţă $Cx'y'z'$,C fiind centrul de masă al sistemului material, iar axele celor doua sisteme sunt paralele. Între momentele de inerţie, în raport cu cele două sisteme se pot stabili următoarele relaţii: Pentru momentele axiale $J_x = J_{x'} + M\left(y_C^2 + z_C^2 \right) = J_{x'} + Md^2{}_{xx'}$

$J_y = J_{y'} + M\left(z_C^2 + x_C^2 \right) = J_{y'} + Md_{yy'}^2$ $J_z = J_{z'} + M\left(x_c^2 + y_c^2 \right) = J_{z'} + Md_{zz'}^2$

Pentru momente de inerţie planare:

$$J_{xOy} = J_{x'Cy'} + Mz_c^2, J_{yOz} = J_{y'Cz'} + Mx_c^2, J_{xOz} = J_{x'Cz'} + My_c^2$$

Pentru momente de inerţie centrifugale: $J_{xy} = J_{x'y'} + Mx_C y_C$, $J_{yz} = J_{y'z'} + My_C z_C$

$$, J_{xz} = J_{x'z'} + Mx_C z_C$$

Pentru momentul de inerţie polar: $J_O = J_C + M\left(x_C^2 + y_C^2 + z_C^2\right)$

8. Impulsul unui punct material şi al unui corp rigid. Teorema impulsului

Se defineşte impulsul unui punct material ca fiind o mărime vectorială egala cu produsul dintre masa punctului material şi vectorul viteză: $\vec{h} = m\vec{v}$. Unitatea de masură pentru impuls în SI Riemann, iar impulsul total se calculează prin integrala pe domeniul D $\vec{H} = \int_D \vec{v}dm$, $\vec{v}$ este viteza unui punct curent, iar dm este elementul de masa.

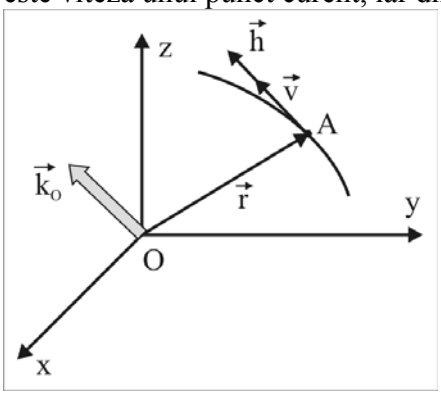


Fig.1

Dacă se derivează impulsul unui punct, în raport cu timpul, ţinând cont de legea lui Newton $m\bar{a} = \bar{F}$, unde m este masa lui, $\bar{a}$ este acceleratia , iar $\bar{F}$ este forţa rezultantă care acţionează asupra lui, se obţine: $\dot{\bar{h}} = m\dot{\bar{v}} = m\bar{a} = \bar{F}$, adică, derivata în raport cu timpul a impulsului unui punct material este egală cu forţa rezultantă care acţioneaza asupra lui : $\dot{\bar{h}} = \bar{F}$. Aceasta reprezintă teorema impulsului. În cazul în care forţa rezultanta este nulă se obţine $\dot{\bar{h}} = 0$, adică impulsul punctului material se conservă ($\bar{h} = const.$).

În mod asemănător, pentru un corp, se demonstrează că $\dot{\vec{H}} = R_{ext} + R_l$, unde R_{ext} este rezultanta forţelor exterioare, iar R_l rezultanta forţelor de legătură ce acţionează asupra corpului.

Momentul cinetic al unui punct material şi al unui corp rigid în raport cu un punct.Teorema momentului cinetic.

Momentul cinetic al unui punct materal in raport cu un punct O se defineşte ca o marime vectorială egală cu produsul vectorial dintre vectorul de pozitie al punctului material în raport cu punctul O, şi impulsul punctului material : $\bar{k}_O = \bar{r} \times \bar{h} = \bar{r} \times m\bar{v}$. Unitatea de măsură a m puncte materiale se obţine $\vec{K}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{h}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$. În cazul unui corp rigid suma se transformă intr-o integrala de domeniu, astfel ca momentul cinetic se calculează prin integrala

$\vec{K}_O = \int_D \vec{r} \times \vec{v}dm$. Se obţin formule distincte pentru diferite mişcări ale corpului rigid. În cazul mişcării de rotaţie cu axă fixă se obţine $\vec{K}_O = -J_{xz}\omega\vec{i} - J_{yz}\omega\vec{j} + J_z\omega\vec{k}$, unde J_{xz}, J_{yz} sunt momente de inerţie centrifugale, J_z estre momentul de inerţie în raport cu axa

de rotaţie (oz), iar . Dacă axa de rotaţie este o axă principală de inerţie (o axă de simetrie) $\vec{K}_O = J_z\omega\vec{k}$, iar ω este viteza ungiulară.

Dacă se derivează în raport cu timpul momentul cinetic în raport cu punctul O, rezultă, utilizand legea lui Newton: $\dot{\bar{k}}_O = \dot{\bar{r}} \times m\bar{v} + \bar{r} \times m\dot{\bar{v}} = \bar{r} \times \bar{F}$, unde $\bar{v} \times m\bar{v} = 0$, adică derivata in raport cu timpul a momentului cinetic in raport cu un punctl O este egala cu momentul in raport cu punctul O, al fortei care actioneaza asupra punctului material: $\dot{\bar{k}}_O = \bar{r} \times \bar{F} = \bar{M}_O$

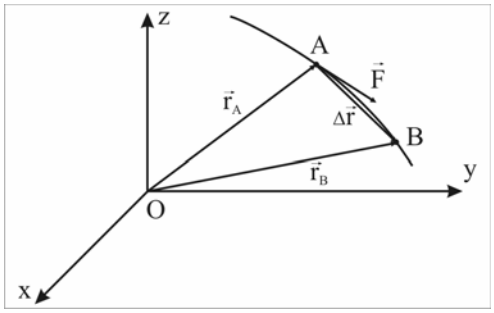
In cazul în care momentul rezultant al forţelor care acţionează asupra unui punct material este nul, momentul cinetic se se conservă: $\bar{k}_O = \text{const.}$

În mod asemănător, pentru un corp, se demonstrează că $\dot{\vec{K}}_{O,C} = M_{O,C}(R_{ext}) + M_{O,C}(R_l)$, unde $M_{O,C}(R_{ext})$ este momentul forţelor exterioare, iar $M_{O,C}(R_l)$ momentul forţelor de legătură ce acţionează asupra corpului calculate in raport cu un punct fix O sau centrul de masa C.

9.Lucrul mecanic şi puterea unei forţe constante şi ale unei forţe variabile. Lucrul mecanic şi puterea unui sistem de forţe.

Lucrul mecanic efectuat de o forta $\vec{F}$, de mărime constantă, la deplasarea unui punct material dinntr-un punct A în punctul B, de-a lungul unei direcţii care face cu forţa unghiul α, este o mărime scalară egală cu: $L = \vec{F}\Delta\vec{r} = F\,AB\cos\alpha$, adică produsul scalar dintre forta $\vec{F}$ şi vectorul deplasare $\Delta\vec{r}$. Unitatea de masură pentru lucrul mecanic în SI este Joule, (notata J). Un Joule $1J = 1Nm$. Dacă unghiul $\alpha \in [0, \pi/2)$ L>0, se spune că forţa este motoare, dacă unghiul $\alpha = \pi/2$, L=0; adică forţele perpendiculare pe deplasare nu dau lucru mecanic, dacă $\alpha \in (\pi/2, \pi]$, L<0, se spune că forţa este rezistentă.

Puterea produsă de o forţă constantă $\vec{F}$ reprezintă lucrul mecanic produs de forţă în unitatea de timp: $P = L/t$. Puterea este un scalar cu semn, putând fi pozitivă, negativă, sau nulă. Unitatea de măsură în SI pentru putere este Watt-ul, notat $1W$.=1Nm/s.



Pentru o forţă variabilă, într-o deplasare elementară $d\vec{r}$, lucru mecanic elementar, notat dL, este $dL = \vec{F}d\vec{r}$. Rezultă că lucrul mecanic efectuat de forta variabila $\vec{F}$ la deplasarea corpului din A in B este: $L_{AB} = \int_{AB} dL = \int_{AB} \vec{F}d\vec{r}$. Dacă se exprimă forţa şi deplasarea elementară prin proiecţiile pe axe: $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$ şi $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$, lucrul mecanic elementar este $dL = F_x dx + F_y dy + F_z dz$. Se întâlnesc cazuri în care proiecţiile pe axe ale forţei $\vec{F}$ sunt derivatele parţiale ale unei funcţii de poziţie U(x,y,z) astfel: $F_x = \partial U/\partial x$, $F_y = \partial U/\partial x, F_z = \partial U/\partial z$. Pentru aceste

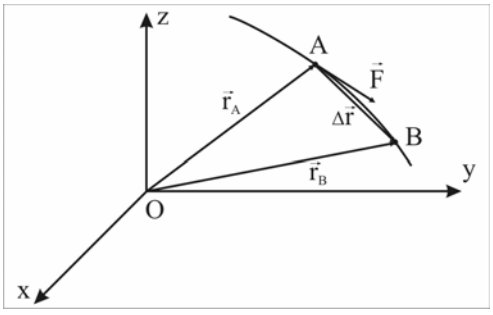
forţe lucrul mecanic elementar este: $dL = \partial U/\partial x\, dx + \partial U/\partial y\, dy + \partial U/\partial z\, dz = dU$, adică este diferenţiala totala a funcţiei U. Funcţia $U(x,y,z)$ se numeşte funcţie de forţă, iar lucrul mecanic al acestor forţe, cu semn schimbat, se numeşte energie potenţială. $E_p = -L = -U(x,y,z) + C$, unde C este o constantă. Forţele care dau energie potenţială se numesc forţe conservative.

Lucrul mecanic al unui sistem de forţe care acţionează asupra unui corp rigid se obţine prin însumarea lucrurilor mecanice ale tuturor forţelor $dL = \sum_{i=1}^{n} dL_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i d\vec{r}_{Ii} = \vec{R} d\vec{r}_{IO} + \vec{M}_O d\vec{\theta}$ unde $\vec{R}$ şi $\vec{M}_O$ sunt elementele torsorului de reducere a sistemului de forţe în punctul O, $d\vec{r}_{IO}$ deplasarea elementară a punctului O, $d\vec{\theta}$ deplasarea elementară unghiulară a corpului. Puterea acestui sistem de forţe este $P = dL/dt = \vec{R}\, d\vec{r}/dt + \vec{M}_O\, d\theta/dt = \vec{R}\vec{v} + \vec{M}_O\vec{\omega}$. Dacă corpul se află, ca urmare a acţiunii forţelor, în mişcarea de translaţie, $\vec{\omega}$=0, iar puterea este $P = \vec{R}\vec{v}$. În cazul în care mişcarea este de rotaţie $P = \vec{M}_O\vec{\omega}$, $\vec{v}$ fiind viteza corpului la un moment dat, respectiv $\vec{\omega}$ este viteza unghiulară. Dacă $\vec{M}_O$ şi $\vec{\omega}$ au acelaşi sens puterea este pozitivă, respectiv negativă în sens contrar. Pentru mişcarea de rotaţie formula puterii mai poate fi scrisă şi în următoarele forme : $P = M_O\omega = M_O\, 2\pi/T = 2\pi f M_O$ .De cele mai multe ori se foloseşte în locul frecvenţei de rotaţie, turaţia, care se dă în rotatii pe minut. Se poate scrie relaţia dintre frecvenţa de rotaţie şi turaţie $f = n/60$, şi în acest caz se obţine, pentru puterea unui motor, formula $P = (\pi n/30) M_O$, unde M_O este momentul cuplului motor.

10.Energia cinetică a unui punct material şi a unui corp in mişcările de translaţie, rotaţie şi plană. Teorema energiei cinetice.

Prin definiţie, energia cinetică a unui punct material de masa m şi viteză v este $E_c = \frac{mv^2}{2}$.

În cazul unui sistem de puncte materiale energia cinetică se exprimă prin însumarea energiilor cinetice ale tuturor punctelor $E_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2}$. Pentru calculul energiei cinetice a unui corp trebuie avut în vedere tipul de mişcare a acestuia. Pentru mişcarea de translaţie, vitezele tuturor punvtelor sunt egale la un moment dat, deci $E_c = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)\frac{v^2}{2} = \frac{Mv^2}{2}$. unde M este masa intregului corp



În cazul mişcării de rotaţie în jurul unei axe, viteza unui punct este $|\vec{v}_i| = |\vec{\omega} \times \vec{r}_i| = \omega d_i$. Înlocuind în formula de calcul a energiei cinetice pentru un corp, se obţine

$E_c = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i (\omega d_i)^2}{2} = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i d_i^2 \right) \frac{\omega^2}{2} = J_\Delta \frac{\omega^2}{2}$, unde J_Δ este momentul de inerţie mecanic în raport cu axa de rotaţie. Dacă corpul are o mişcare de rotaţie cu punct fix (O), iar axele sistemului Oxyz, legat de corp, sunt axe principale de inerţie, energia cinetică se calculează cu formula $E_c = \frac{1}{2}\left(J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2 \right)$. Pentru mişcarea plan paralelă, axa instantanee de rotaţie este axa Δ . considerând o axă paralelă cu Δ prin centrul de masă C, se poate scrie formula lui Steiner : $J_\Delta = J_z + M \cdot IC^2$, unde IC este distanţa de la axa instantanee de rotaţie la centru de masă. Înlocuind în formula de calcul a energiei cinetice de rotaţie, rezultă $E_c = \frac{M v_C^2}{2} + \frac{J_z \omega^2}{2}$, unde s-a ţinut cont că $\left| \vec{v}_C \right| = \left| \vec{\omega} \times \vec{IC} \right| = \omega \cdot IC$.

Teorema energiei cinetice. Dacă se scrie legea fundamentală a dinamicii pentru un punct material supus la legături, după înmulţirea scalară cu vectorul $d\vec{r}$, aceasta se scrie sub forma :

$m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = \vec{F}_{ext} d\vec{r} + \vec{F}_l d\vec{r}$, adică $m\vec{v}d\vec{v} = dL_{ext} + dL_l$ sau $d\left(\frac{mv^2}{2} \right) = dE_c = dL_{ext} + dL_l$,

adică, variaţia energiei cinetice într-o deplasare elementară este egalaă cu lucrul mecanic elementar al forţelor direct aplicate şi de legătură ce acţionează asupra punctului.

Pentru o deplasare finită, din poziţia iniţială A în poziţie B, integrând relaţia precedentă, se obţine teorema energiei cinetice sub formă integrală

$E_{CA} - E_{CB} = \left(L_{ext} \right)_{A \to B} + \left(L_l \right)_{A \to B}$, adică variaţia energiei cinetice intr-o deplasare finită a punctului material este egală cu lucrul mecanic al forţelor direct aplicate (exterioare) şi de legătură.

În cazul unui corp rigid se aplică legea fundamentală adinamicii pentru un punct i al corpului, înmulţită cu deplasarea elementară faţă de sistemul fix : $d\vec{r}_{li}$

$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} d\vec{r}_{li} = \vec{F}_{ext} d\vec{r}_{li} + \vec{F}_l d\vec{r}_{li} + \sum_{j=1}^{N} F_{ij} d\vec{r}_{li}$, Scriind această lege pentru toate punctele materiuale ale corpului rigid şi ţinând cont de faptul că lucrul mecanic al forţelor interioare (perechi) este nul, se obţine forma diferenţială a teoremei energiei cinetice: $dE_c = dL_{ext} + dL_l$, adică, diferenţiala energiei cinetice a unui sistem material rigid(corp) este egală cu lucrul mecanic elementar al tuturor forţelor exterioare (date) şi de legătură ce acţionează asupra lui. Sub formă integrală această teoremă este:

$E_{CA} - E_{CB} = \left(L_{ext} \right)_{A \to B} + \left(L_l \right)_{A \to B}$. Această formă este frecvent utilizată în aplicaţii.

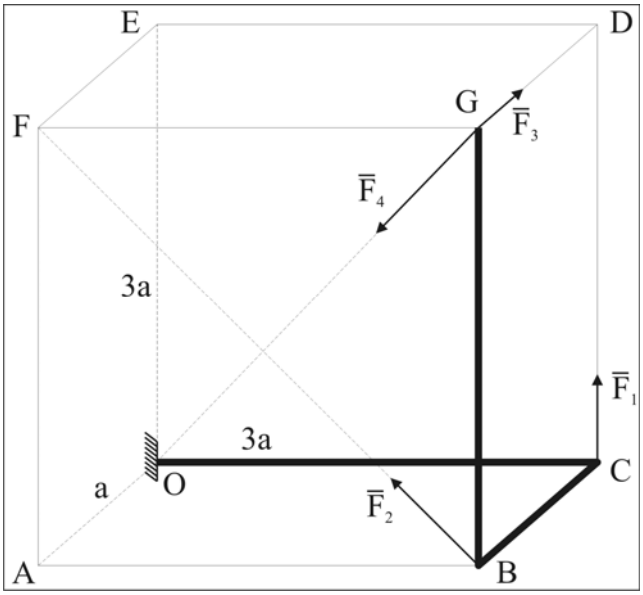
Aplicatii

1. Momentul unei forţe în raport cu un punct
2. Elementele cinematice ale mişcării. Legea de mişcare. Traiectoria. Viteza. Acceleraţia.
3. Se da sistemul de forţe care acţionează asupra barei cotite din figură. Forţele au modulele: $F_1= F$, $F_2=3F\sqrt{2}$, $F_3= F$, $F_4= F\sqrt{19}$.

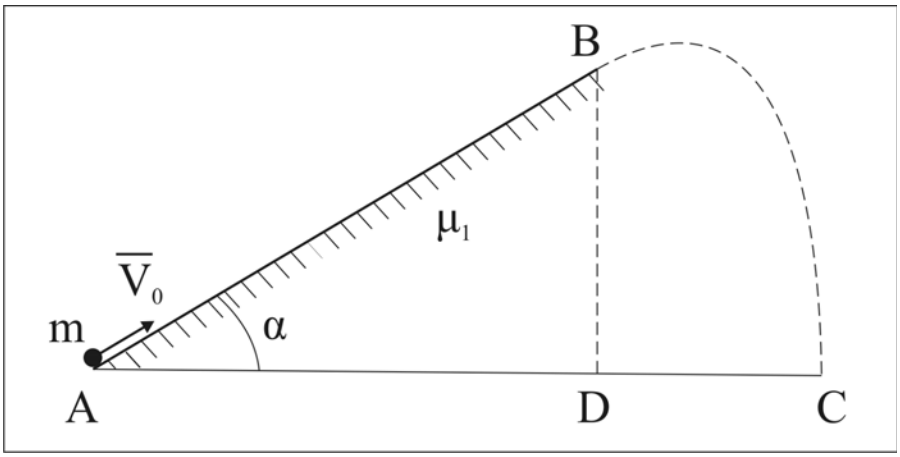
Se cer:

a. Torsorul de reducere in O

b. Ecuaţia axei centrale



4. Punctul material de masă m este lansat din A cu viteza v_0 pe planul înclinat cu unghiul α, coeficientul de frecare fiind μ, din punctul B cade liber ajungând în C. Se cunoaşte lungimea planului AB=a. Să se determine: a) legea de mişcare pe planul înclinat a punctului material; b) viteza în punctul B; c) viteza în punctul C.

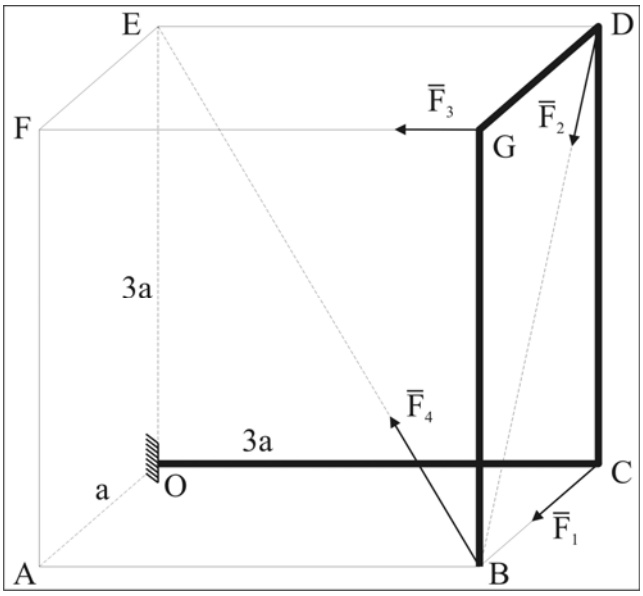


1. Momentul unei forţe în raport cu o axă. Cuplu
2. Viteza si acceleraţia areolară.
3. Se da sistemul de forţe care acţionează asupra barei cotite din figură. Forţele au modulele: $F_1= F$, $F_2= F\sqrt{10}$, $F_3= F$, $F_4= F\sqrt{19}$.

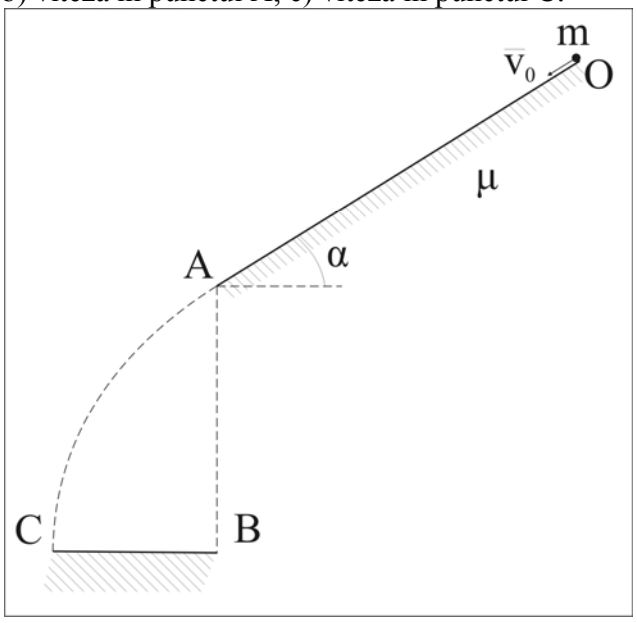
Se cer:

a. Torsorul de reducere in O

b. Ecuaţia axei centrale



4. Punctul material de masă m este lansat din O cu viteza v_0 pe planul înclinat cu unghiul α, coeficientul de frecare fiind μ, din punctul A cade liber ajungând în C. Se cunoaşte lungimea planului OA=l. Să se determine: a) legea de mişcare pe planul înclinat a punctului material; b) viteza în punctul A; c) viteza în punctul C.

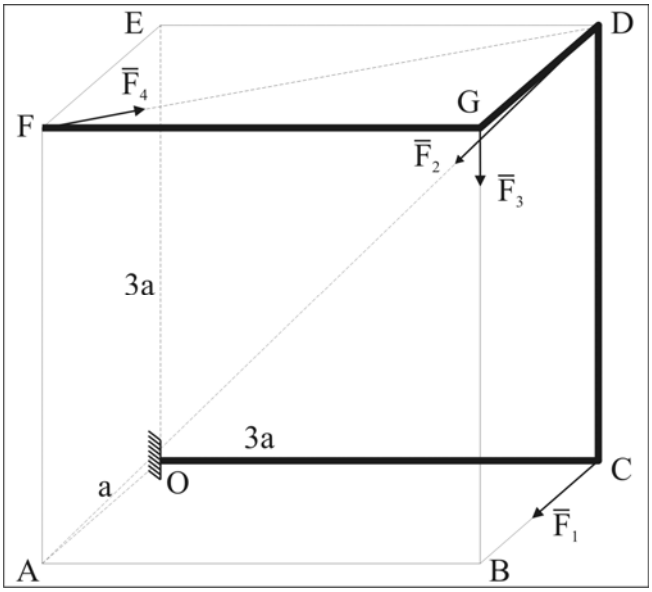


1. Reducerea unui sistem de forţe.
2. Studiul mişcării unui punct în coordonate carteziene.
3. Se da sistemul de forţe care acţionează asupra barei cotite din figură. Forţele au modulele:F_1= F, F_2= F $\sqrt{19}$, F_3= F, F_4= F $\sqrt{10}$.

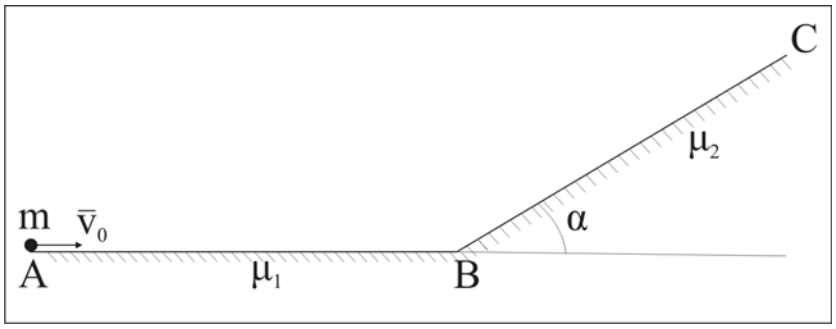
Se cer:

a. Torsorul de reducere in O

b. Ecuaţia axei centrale



4. Punctul material de masă m este lansat din A cu viteza v_0 pe un plan orizontal, coeficientul de frecare fiind μ_1, din punctul B punctul material urcă pe un plan înclinat cu unghiul α, coeficientul de frecare fiind μ_2. Se cunoaşte AB=l_1, BC=l_2. Să se determine: a) viteza în punctul B; b) legea de mişcare pe planul înclinat a punctului material; c) viteza în punctul C.

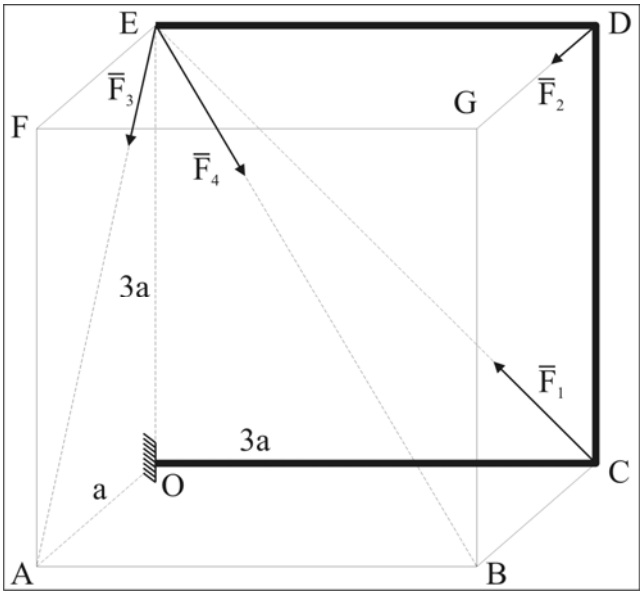


1. Axa centrală.
2. Studiul mişcării unui punct în coordonate polare.
3. Se da sistemul de forţe care acţionează asupra barei cotite din figură. Forţele au modulele: $F_1= 3F\sqrt{2}$, $F_2= F$, $F_3= F\sqrt{10}$, $F_4= F\sqrt{19}$.

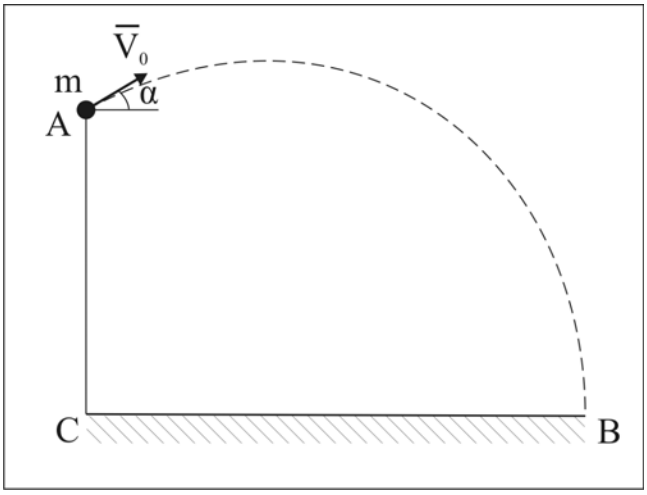
Se cer:

a. Torsorul de reducere in O

b. Ecuaţia axei centrale



4. Un punct material de masă m este aruncat cu viteza iniţială v_0 înclinată cu unghiul α faţă de orizontală. Să se determine: a) legea de mişcare; b) distanţa CB; c) viteza în punctul B.

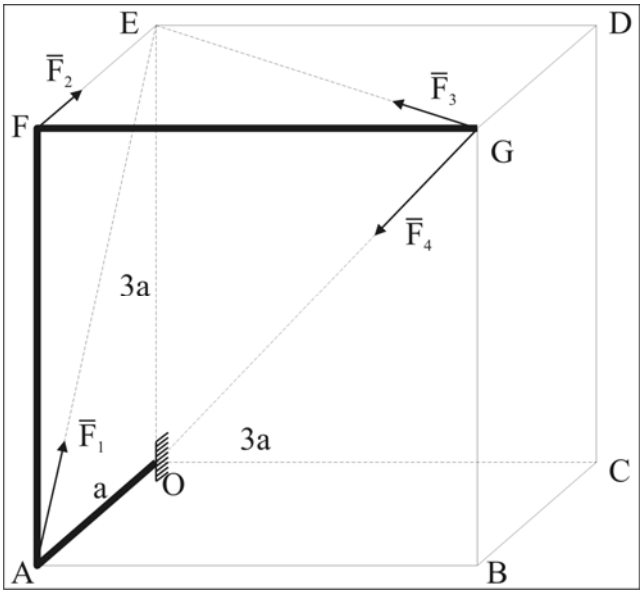


1. Cazuri de reducere.
2. Studiul mişcării unui punct în coordonate intrinseci.
3. Se da sistemul de forţe care acţionează asupra barei cotite din figură. Forţele au modulele: $F_1 = F\sqrt{10}$, $F_2 = F$, $F_3 = F\sqrt{10}$, $F_4 = F\sqrt{19}$.

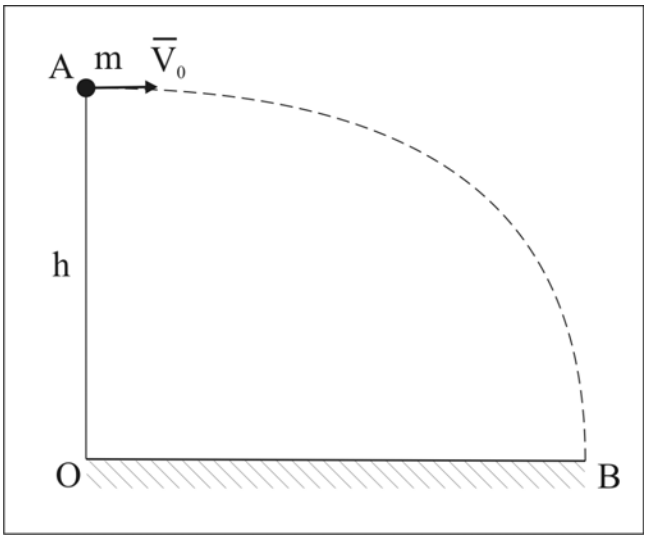
   Se cer:

   a. Torsorul de reducere in O

   b. Ecuaţia axei centrale



4. Un punct material de masă m este aruncat de la înălţimea h cu viteza orizontală v_0. Să se determine: a) legea de mişcare; b) distanţa OB; c) viteza în punctul B.



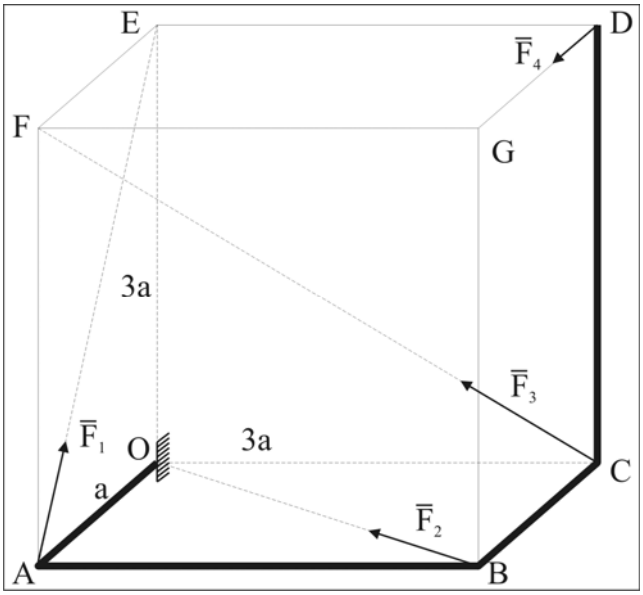
1. Reducerea unui sistem de forţe plane.
2. Mişcarea generală a unui corp. Legile de mişcare.

3. Se da sistemul de forţe care acţionează asupra barei cotite din figură. Forţele au modulele: $F_1 = F\sqrt{10}$, $F_2 = F\sqrt{10}$, $F_3 = F\sqrt{19}$, $F_4 = F$.

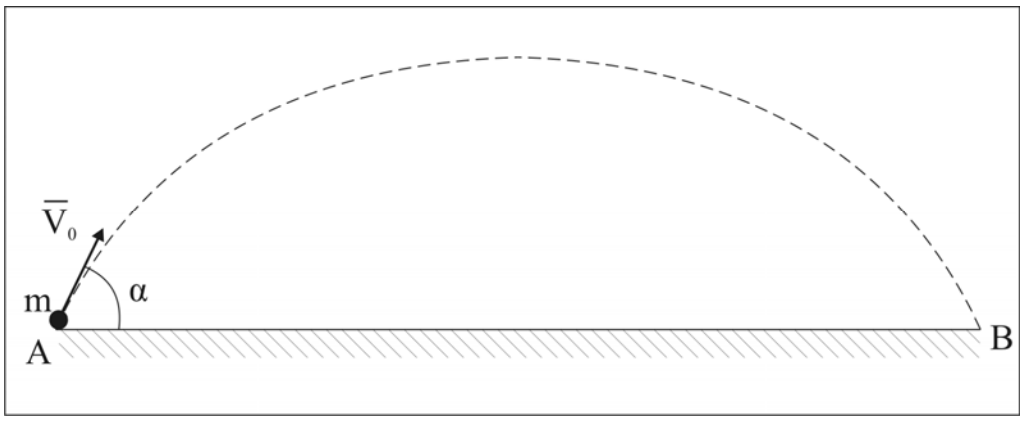
Se cer:

a. Torsorul de reducere in O

b. Ecuaţia axei centrale



4. Un punct material de masă m este aruncat cu viteza v_0 sub un unghi α faţă de orizontală. Să se determine: a) legea de mişcare; b) distanţa AB; c) viteza în punctul B.

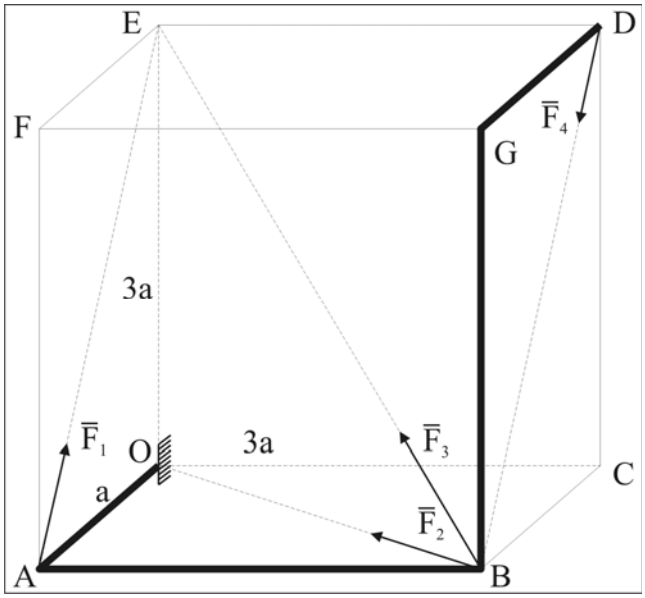


1. Reducerea unui sistem de forţe paralele.
2. Distribuţia de viteze în mişcarea generala. Proprietaţi.
3. Se da sistemul de forţe care acţionează asupra barei cotite din figură. Forţele au modulele: $F_1= F\sqrt{10}$, $F_2= F\sqrt{10}$, $F_3= F\sqrt{19}$, $F_4= F\sqrt{10}$.

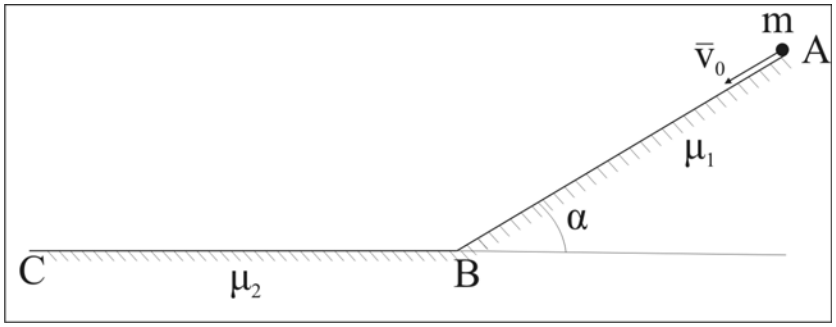
Se cer:

a. Torsorul de reducere in O

b. Ecuaţia axei centrale



4. Punctul material de masă m este lansat din A cu viteza v_0 pe un plan înclinat cu unghiul α, coeficientul de frecare fiind μ_1, din punctul B punctul material continuă mişcarea pe un plan orizontal, coeficientul de frecare fiind μ_2. Se cunoaşte AB=l_1, BC=l_2. Să se determine: a) legea de mişcare pe planul înclinat a punctului material; b) viteza în punctul B; c) viteza în punctul C.

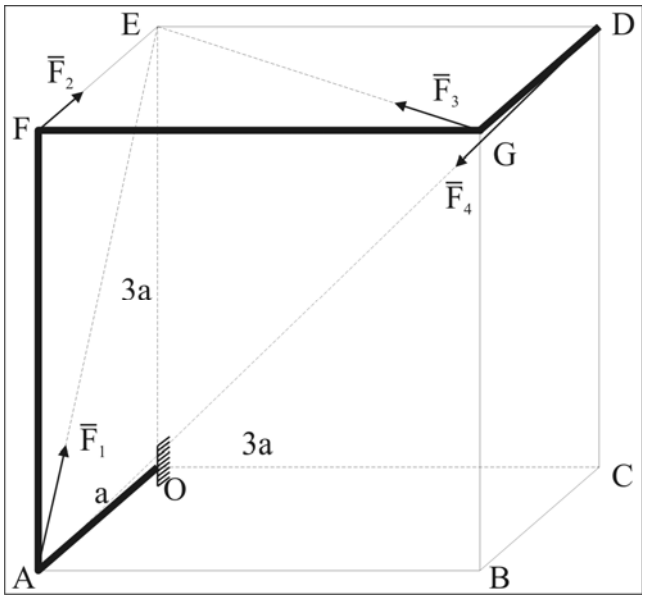


1. Echilibrul corpului liber.
2. Mişcarea de translaţie.
3. Se da sistemul de forţe care acţionează asupra barei cotite din figură. Forţele au modulele: $F_1= F\sqrt{10}$, $F_2= F$, $F_3= F\sqrt{10}$, $F_4= F\sqrt{19}$.

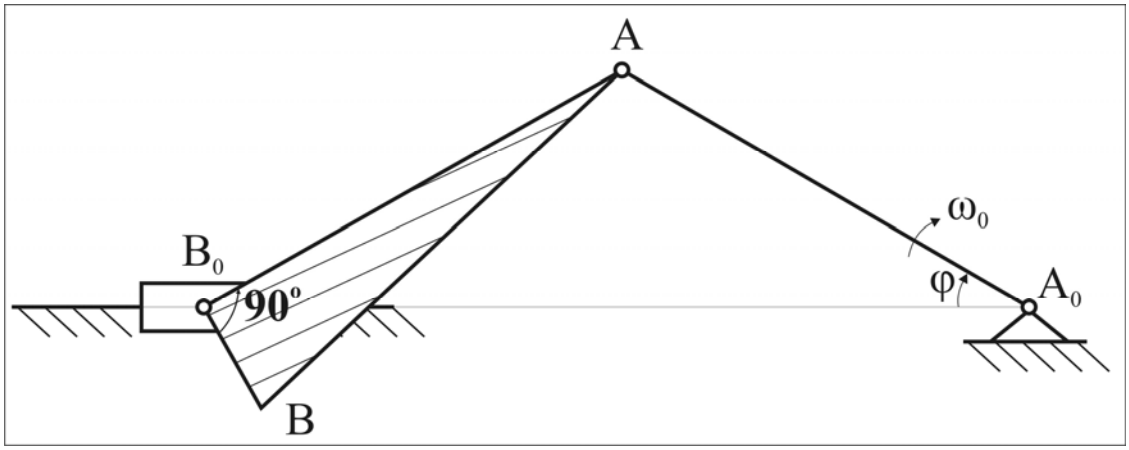
Se cer:

a. Torsorul de reducere in O

b. Ecuaţia axei centrale



4. Se consideră mecanismul bielă manivelă din figură pentru care se cunosc $A_0A=AB_0=a$, $BB_0=b$, ω_0=constantă. Să se determine pentru bielă: poziţia centrului instantaneu de rotaţie, baza, rostogolitoarea, viteza unghiulară instantanee, viteza punctului B, polul acceleraţiilor, acceleraţia punctului B.

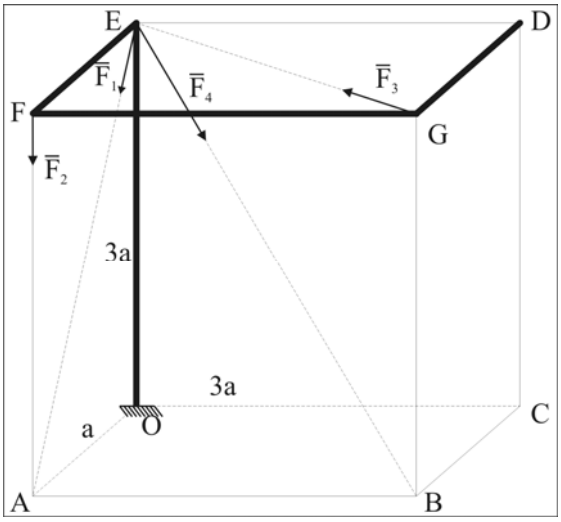


1. Echilibrul corpului supus la legături.
2. Mişcarea de rotaţie cu axă fixă. Legile de mişcare.
3. Se da sistemul de forţe care acţionează asupra barei cotite din figură. Forţele au modulele: $F_1= F\sqrt{10}$, $F_2= F$, $F_3= F\sqrt{10}$, $F_4= F\sqrt{19}$.

Se cer:

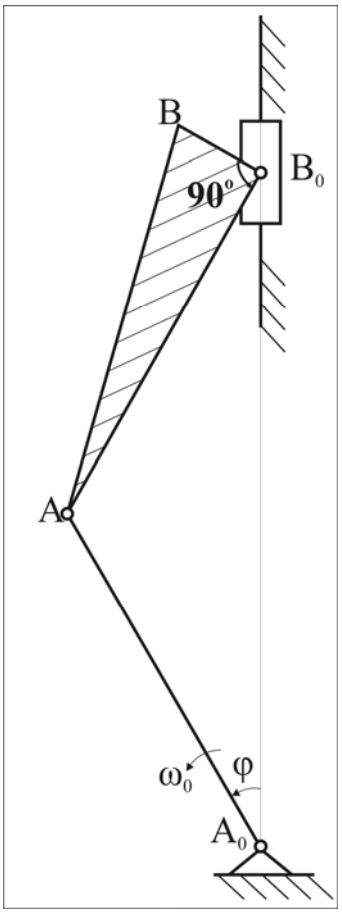
a. Torsorul de reducere in O

b. Ecuaţia axei centrale



4. Se consideră mecanismul bielă manivelă din figură pentru care se cunosc $A_0A=AB_0=a$, $BB_0=b$, ω_0=constantă. Să se determine pentru bielă: poziţia centrului instantaneu de

rotaţie, baza, rostogolitoarea, viteza unghiulară instantanee, viteza punctului B, polul acceleraţiilor, acceleraţia punctului B.

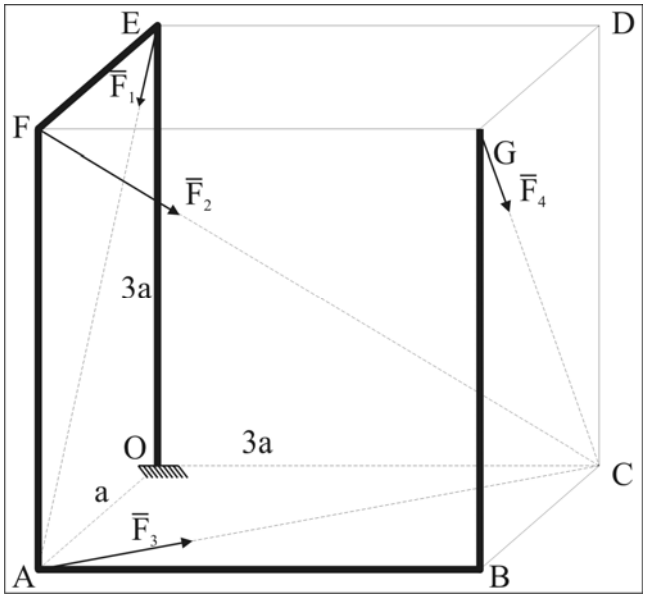


1. Rezemarea.
2. Distribuţia de viteze în mişcarea de rotaţie cu axă fixă. Proprietaţi.
3. Se da sistemul de forţe care acţionează asupra barei cotite din figură. Forţele au modulele: $F_1= F\sqrt{10}$, $F_2= F\sqrt{19}$, $F_3= F\sqrt{10}$, $F_4= F\sqrt{10}$.

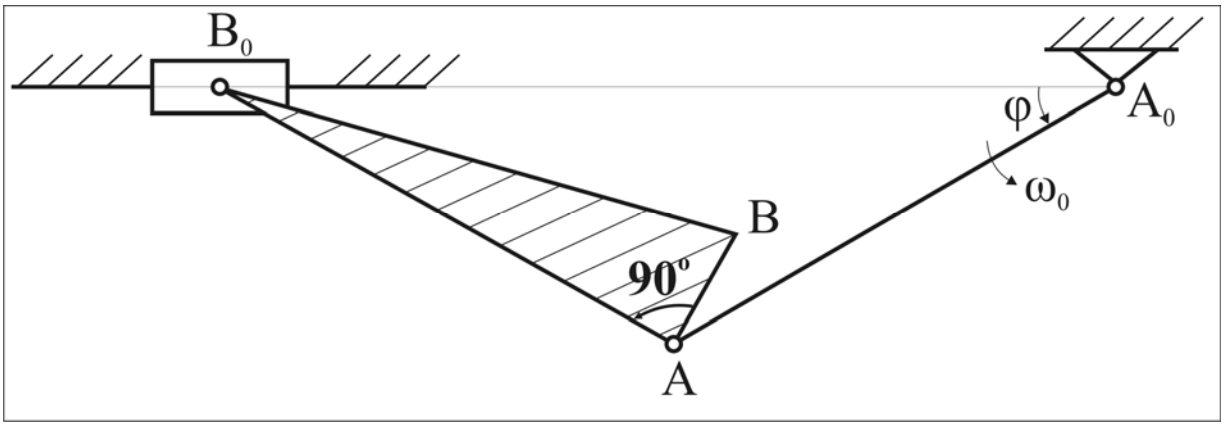
Se cer:

a. Torsorul de reducere in O

b. Ecuaţia axei centrale



4. Se consideră mecanismul bielă manivelă din figură pentru care se cunosc $A_0A=AB_0=a$, $BB_0=b$, ω_0=constantă. Să se determine pentru bielă: poziţia centrului instantaneu de rotaţie, baza, rostogolitoarea, viteza unghiulară instantanee, viteza punctului B, polul acceleraţiilor, acceleraţia punctului B.



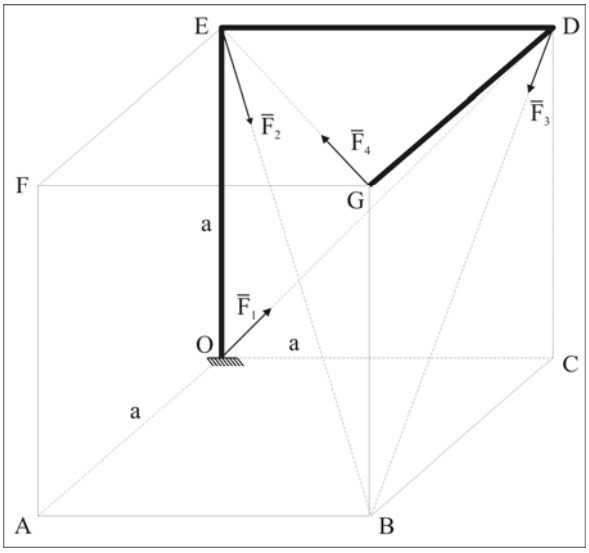
1. Articulaţia
2. Distribuţia de acceleraţii în mişcarea de rotaţie cu axă fixă. Proprietaţi.

3. Se da sistemul de forţe care acţionează asupra barei cotite din figură. Forţele au modulele: $F_1= F\sqrt{2}$, $F_2= F\sqrt{3}$, $F_3= F\sqrt{2}$, $F_4= F\sqrt{2}$.

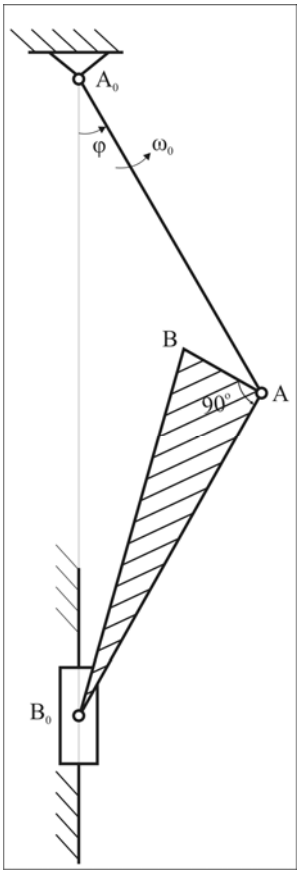
Se cer:

a. Torsorul de reducere in O

b. Ecuaţia axei centrale



4. Se consideră mecanismul bielă manivelă din figură pentru care se cunosc $A_0A=AB_0=a$, $BB_0=b$, ω_0=constantă. Să se determine pentru bielă: poziţia centrului instantaneu de rotaţie, baza, rostogolitoarea, viteza unghiulară instantanee, viteza punctului B, polul acceleraţiilor, acceleraţia punctului B.

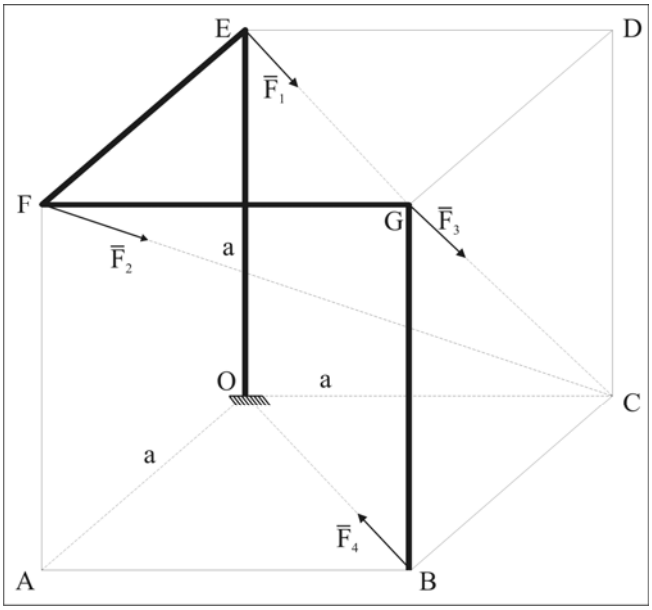


1. Încastrarea.Legătura cu fir.
2. Mişcarea de rototranslaţie. Legile mişcării.
3. Se da sistemul de forţe care acţionează asupra barei cotite din figură. Forţele au modulele: $F_1= F\sqrt{2}$, $F_2= F\sqrt{3}$, $F_3= F\sqrt{2}$, $F_4= F\sqrt{2}$.

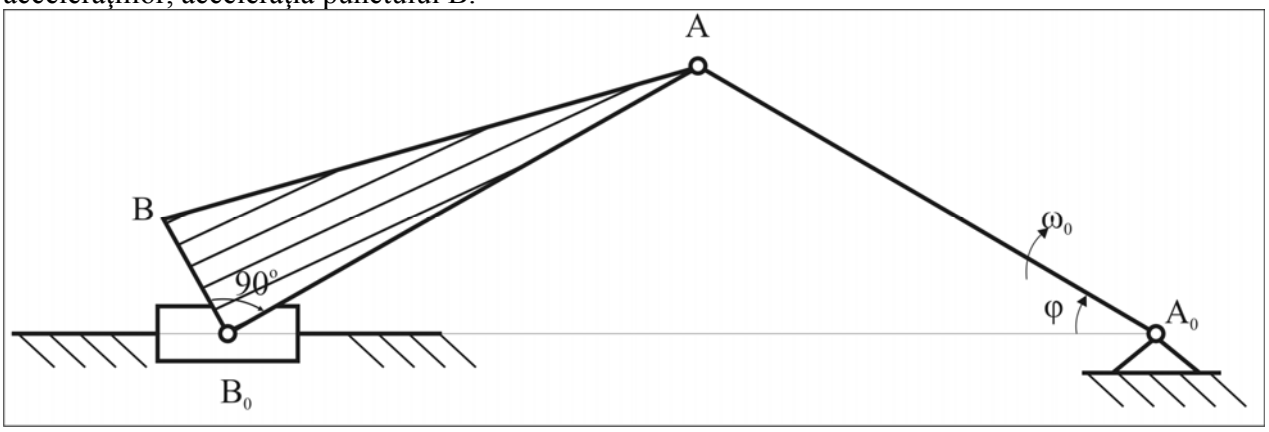
Se cer:

a. Torsorul de reducere in O

b. Ecuaţia axei centrale



4. Se consideră mecanismul bielă manivelă din figură pentru care se cunosc $A_0A=AB_0=a$, $BB_0=b$, ω_0=constantă. Să se determine pentru bielă: poziţia centrului instantaneu de rotaţie, baza, rostogolitoarea, viteza unghiulară instantanee, viteza punctului B, polul acceleraţiilor, acceleraţia punctului B.



1. Centrul de greutate al unui sistem de puncte materiale.

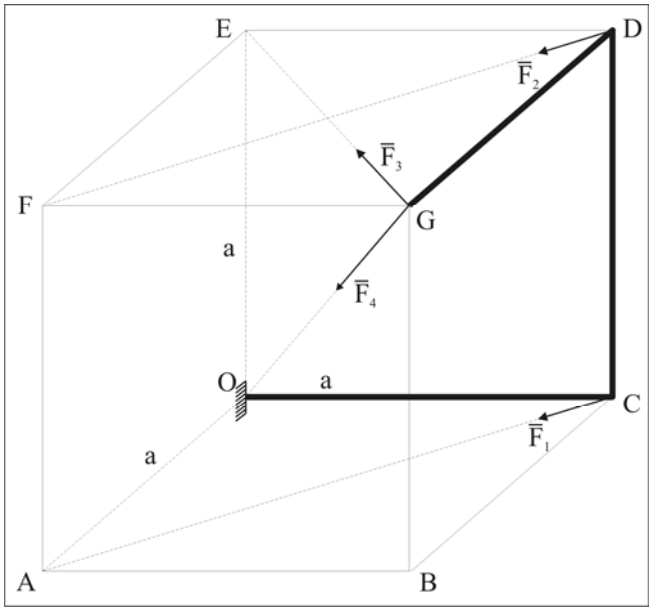
2. Distribuţia de viteze în mişcarea de rototranslaţie. Proprietaţi.

3. Se da sistemul de forţe care acţionează asupra barei cotite din figură. Forţele au modulele $F_1= F\sqrt{2}$, $F_2= F\sqrt{2}$, $F_3= F\sqrt{2}$, $F_4= F\sqrt{3}$.

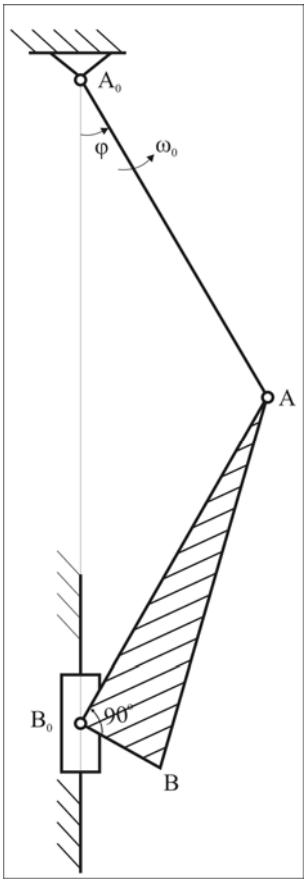
Se cer:

a. Torsorul de reducere in O

b. Ecuaţia axei centrale



4. Se consideră mecanismul bielă manivelă din figură pentru care se cunosc $A_0A=AB_0=a$, $BB_0=b$, ω_0=constantă. Să se determine pentru bielă: poziţia centrului instantaneu de rotaţie, baza, rostogolitoarea, viteza unghiulară instantanee, viteza punctului B, polul acceleraţiilor, acceleraţia punctului B.

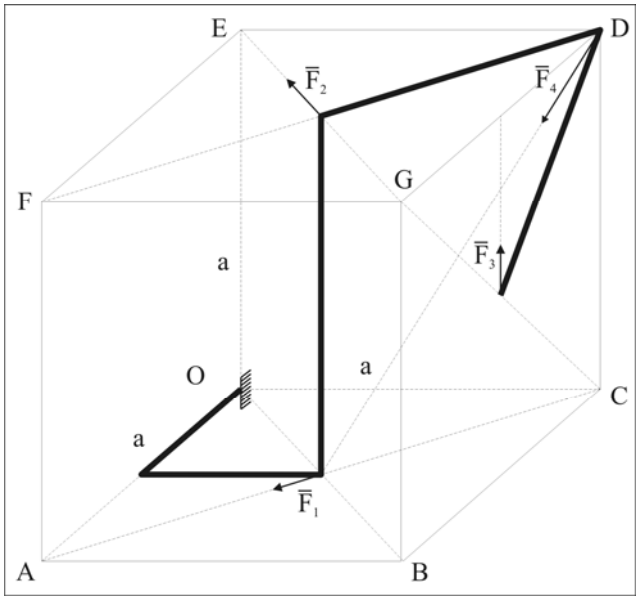


1. Centrul de greutate al unui sistem material continuu.
2. Distribuţia de acceleraţii în mişcarea de rototranslaţie. Proprietaţi.
3. Se da sistemul de forţe care acţionează asupra barei cotite din figură. Forţele au modulele $F_1= F\sqrt{2}$, $F_2= F\sqrt{2}$, $F_3= F$, $F_4= F\sqrt{6}$.

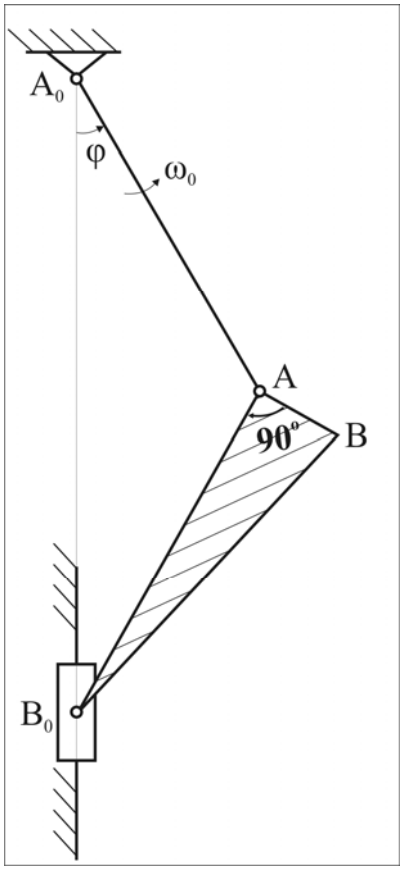
Se cer:

a. Torsorul de reducere in O

b. Ecuaţia axei centrale



4. Se consideră mecanismul bielă manivelă din figură pentru care se cunosc $A_0A=AB_0=a$, $BB_0=b$, ω_0=constantă. Să se determine pentru bielă: poziţia centrului instantaneu de rotaţie, baza, rostogolitoarea, viteza unghiulară instantanee, viteza punctului B, polul acceleraţiilor, acceleraţia punctului B.



1. Centrul de greutate al unui corp format din mai multe componente (subsisteme).

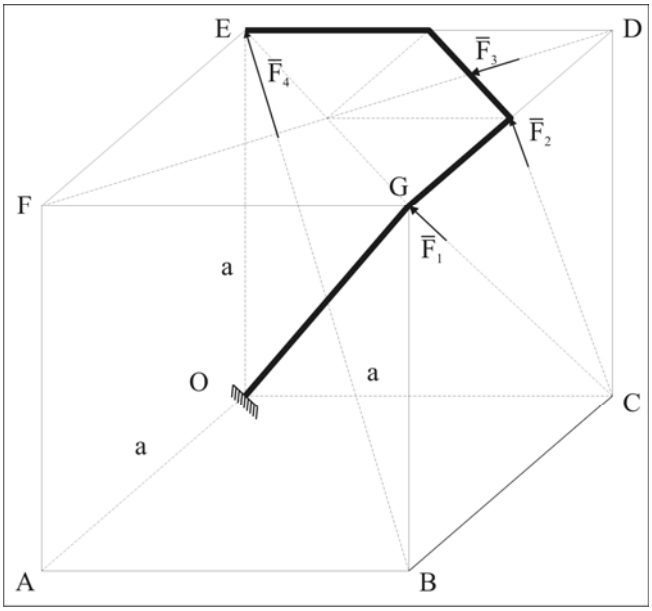
2. Mişcarea plan paralelă. Legile de mişcare.

3. Se da sistemul de forţe care acţionează asupra barei cotite din figură. Forţele au modulele $F_1= F\sqrt{2}$, $F_2= F\sqrt{5}$, $F_3= F\sqrt{2}$, $F_4= F\sqrt{3}$.

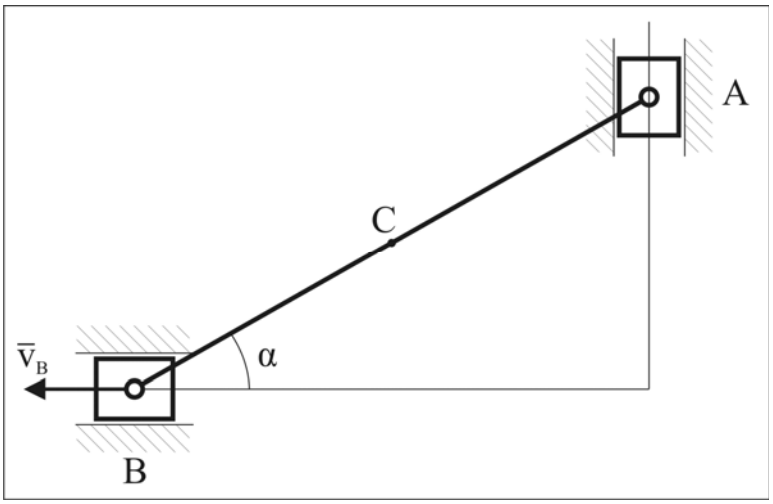
Se cer:

a. Torsorul de reducere in O

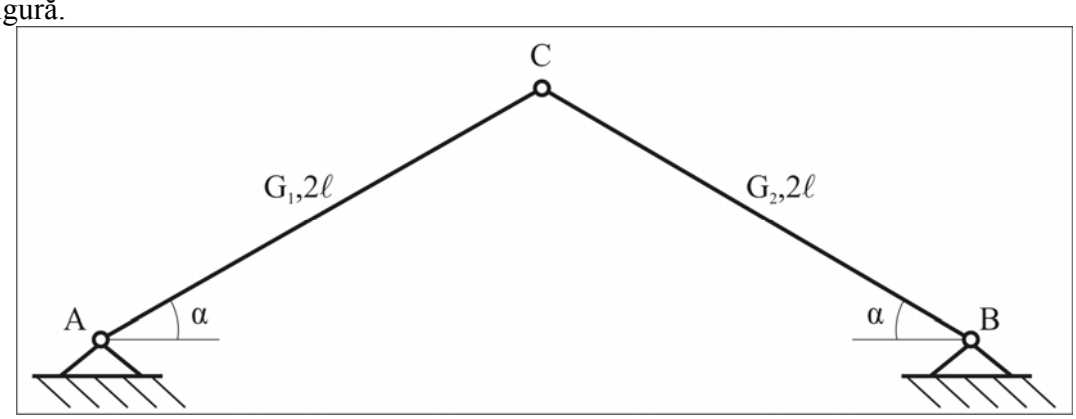
b. Ecuaţia axei centrale



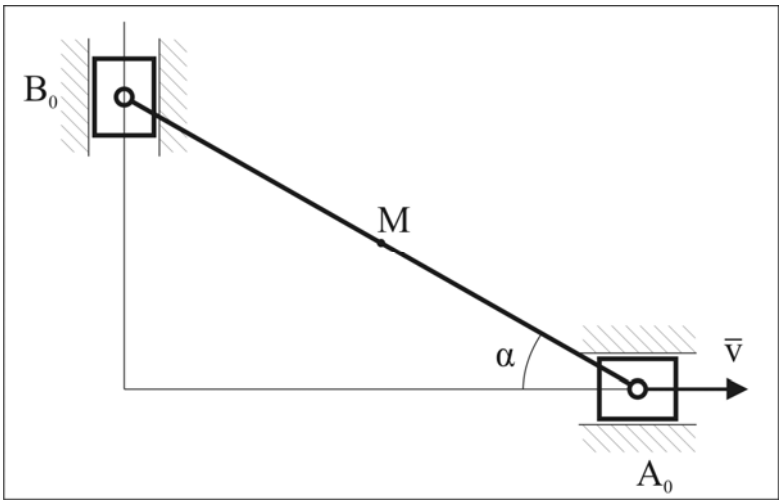
4. Se consideră bara AB de lungime l care se mişcă astfel încât capetele sale A şi B se deplasează după două direcţii perpendiculare, capătul B deplasându-se cu viteza constantă v_A Să se determine pentru bara AB: poziţia centrului instantaneu de rotaţie, baza, rostogolitoarea, viteza unghiulară instantanee, viteza punctului C, polul acceleraţiilor, acceleraţia punctului C.



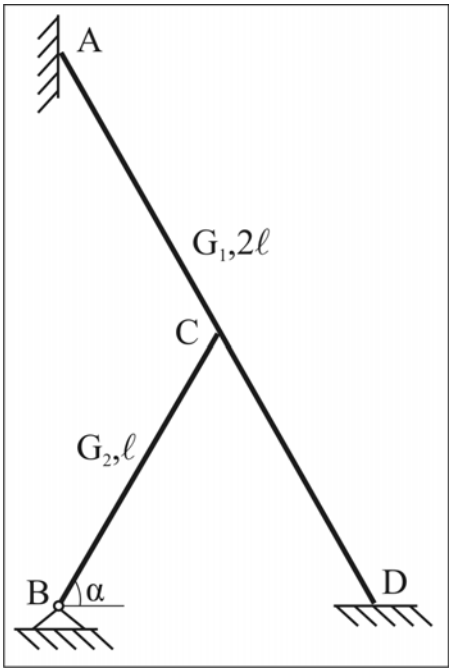
1. Frecarea firelor.
2. Distribuţia de viteze în mişcarea plan paralelă. Centrul instantaneu de rotaţie.
3. Să se determine reacţiunile din articulaţiile A, B, C, pentru poziţia de echilibru din figură.



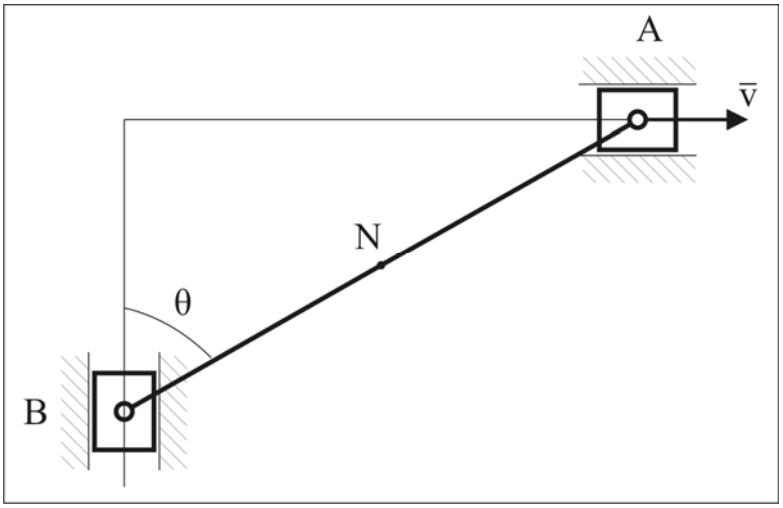
4. Se consideră bara AB de lungime 2l care se mişcă astfel încât capetele sale A_0 şi B_0 se deplasează după două direcţii perpendiculare, capătul A_0 deplasându-se cu viteza constantă v Să se determine pentru bara AB: poziţia centrului instantaneu de rotaţie, baza, rostogolitoarea, viteza unghiulară instantanee, viteza punctului M, polul acceleraţiilor, acceleraţia punctului M.



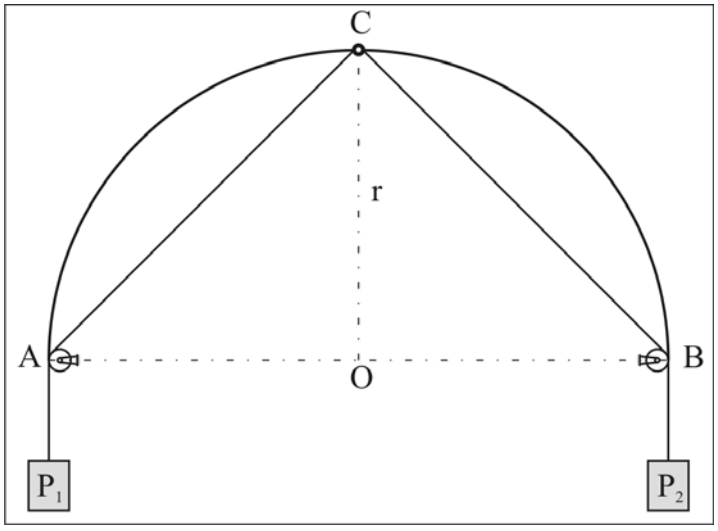
1. Momentul unei forţe în raport cu un punct.
2. Baza si rostogolitoarea. Proprietaţi ale distribuţiei de viteze.
3. Să se determine reacţiunile din articulaţia B şi reazemele A, C şi D pentru poziţia de echilibru din figură. Se dau: AC=CD=BC=l.



4. Se consideră bara AB de lungime a care se mişcă astfel încât capetele sale A şi B se deplasează după două direcţii perpendiculare, capătul A deplasându-se cu viteza constantă v Să se determine pentru bara AB: poziţia centrului instantaneu de rotaţie, baza, rostogolitoarea, viteza unghiulară instantanee, viteza punctului N, polul acceleraţiilor, acceleraţia punctului N.

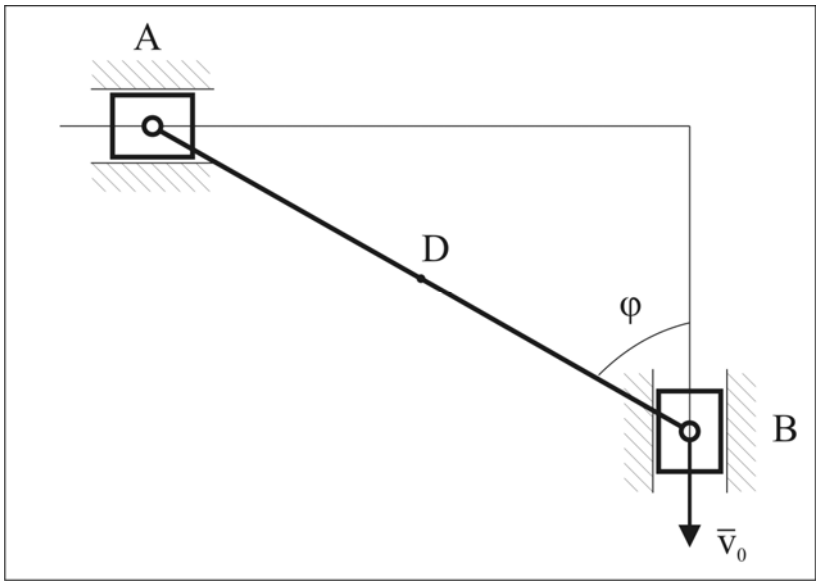


1. Momentul unei forţe în raport cu o axă. Cuplu.
2. Distribuţia de acceleraţii în mişcarea plană. Proprietaţi.
3. Un inel C de greutate neglijabilă se poate mişca cu frecare (coficientul de frecare μ) pe un semicerc de rază r. De inel sunt legate două fire trecute peste scripeţii A şi B. De fire sunt legate greutăţile P_1 şi P_2. Sa se determine raportul P_1/P_2 pentru ca inelul să fie în echilibru.

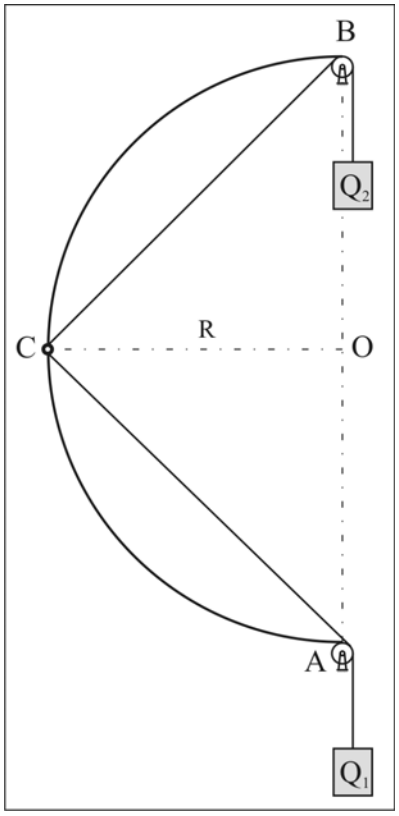


4. Se consideră bara AB de lungime 2a care se mişcă astfel încât capetele sale A şi B se deplasează după două direcţii perpendiculare, capătul B deplasându-se cu viteza

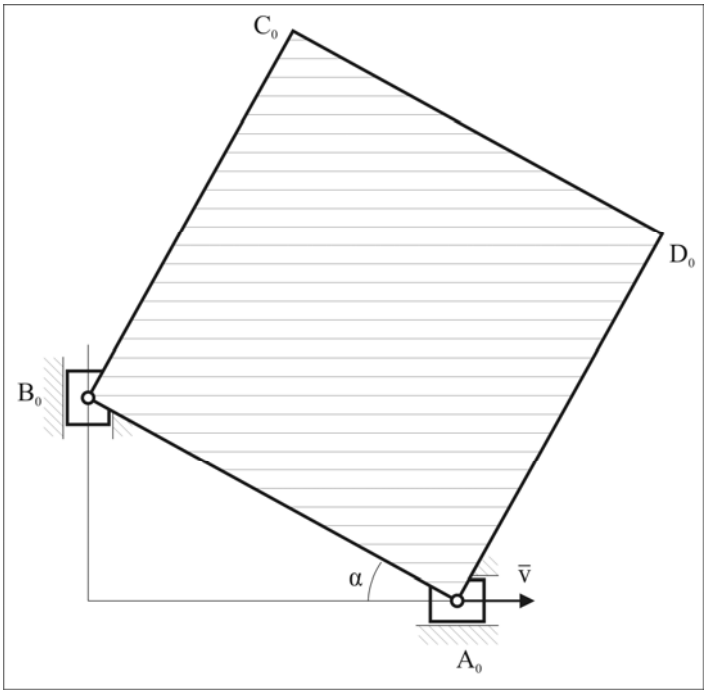
constantă v_0 Să se determine pentru bara AB: poziţia centrului instantaneu de rotaţie, baza, rostogolitoarea, viteza unghiulară instantanee, viteza punctului D, polul acceleraţiilor, acceleraţia punctului D.



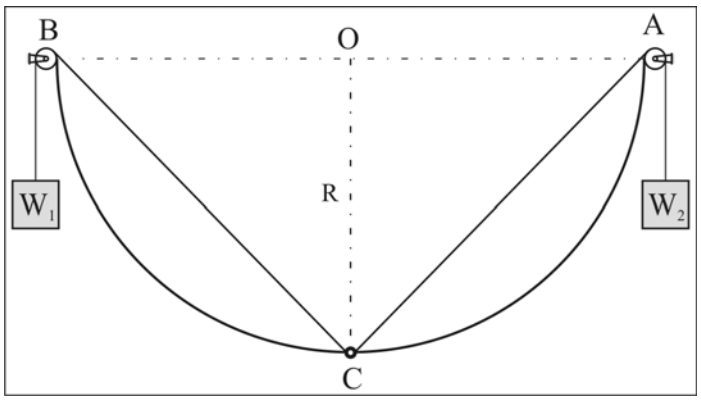
1. Reducerea unui sistem de forţe.
2. Mişcarea relativă a unui punct material.
3. Un inel C de greutate neglijabilă se poate mişca cu frecare (coficientul de frecare μ) pe un semicerc de rază R. De inel sunt legate două fire trecute peste scripeţii A şi B. De fire sunt legate greutăţile Q_1 şi Q_2. Sa se determine raportul Q_1/Q_2 pentru ca inelul să fie în echilibru.



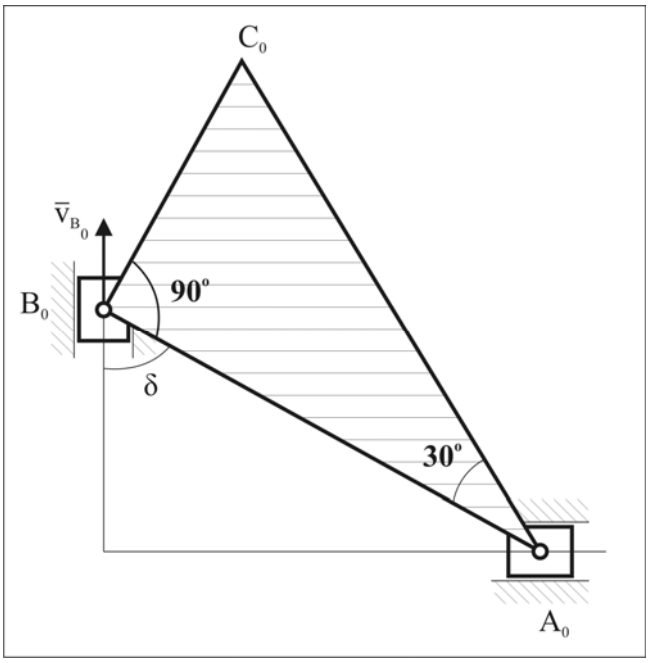
4. Se consideră placa patrată $A_0B_0C_0D_0$ de latură l care se mişcă astfel încât capetele sale A_0 şi B_0 se deplasează după două direcţii perpendiculare, capătul A_0 deplasându-se cu viteza constantă v Să se determine pentru placă: poziţia centrului instantaneu de rotaţie, baza, rostogolitoarea, viteza unghiulară instantanee, viteza punctului D_0, polul acceleraţiilor, acceleraţia punctului D_0.



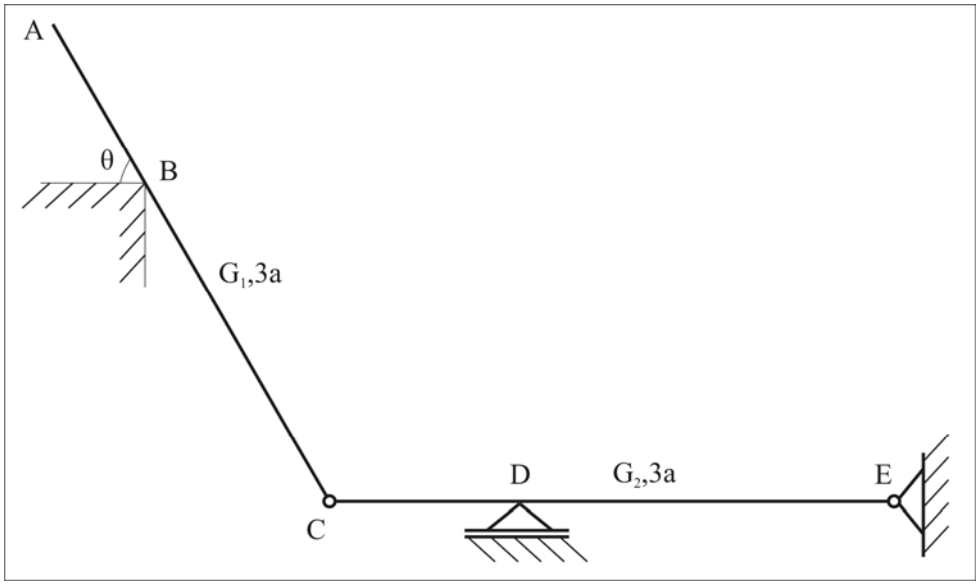
1. Axa centrală.
2. Momente de inerţie. Definiţii si relaţii între momentele de inerţie.
3. Un inel C de greutate neglijabilă se poate mişca cu frecare (coficientul de frecare μ) pe un semicerc de rază R. De inel sunt legate două fire trecute peste scripeţii A şi B. De fire sunt legate greutăţile W_1 şi W_2. Sa se determine raportul W_1/W_2 pentru ca inelul să fie în echilibru.



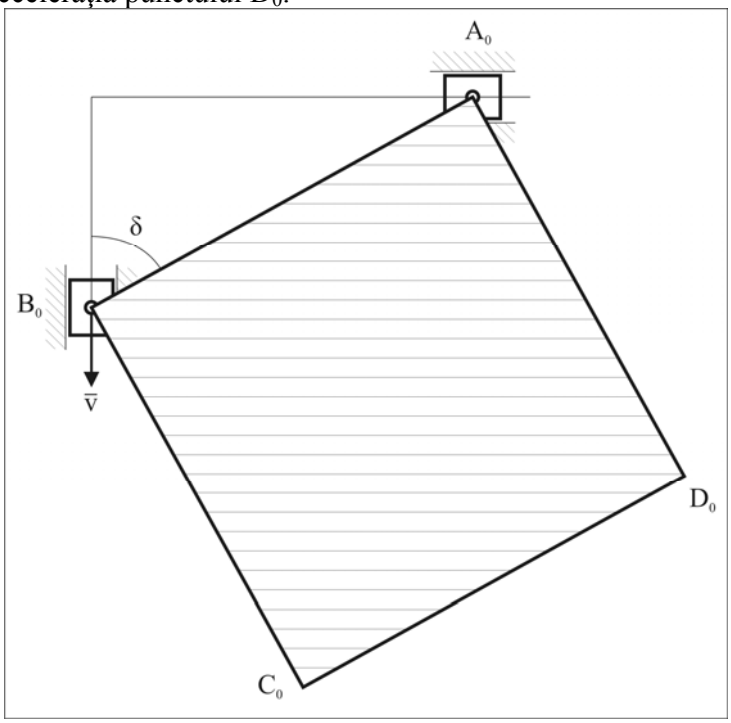
4. Se consideră placa triunghiulară $A_0B_0C_0$ de latură a care se mişcă astfel încât capetele sale A_0 şi B_0 se deplasează după două direcţii perpendiculare, capătul B_0 deplasându-se cu viteza constantă v_{B0} Să se determine pentru placă: poziţia centrului instantaneu de rotaţie, baza, rostogolitoarea, viteza unghiulară instantanee, viteza punctului C_0, polul acceleraţiilor, acceleraţia punctului C_0.



1. Cazuri de reducere.
2. Momente de inerţie pentru un corp continuu.
3. Să se determine reacţiunile din articulaţia B şi reazemele A, C şi D pentru poziţia de echilibru din figură. Se dau: AB=CD=a.



4. Se consideră placa patrată $A_0B_0C_0D_0$ de latură 2a care se mişcă astfel încât capetele sale A_0 şi B_0 se deplasează după două direcţii perpendiculare, capătul B_0 deplasându-se cu viteza constantă v Să se determine pentru placă: poziţia centrului instantaneu de rotaţie, baza, rostogolitoarea, viteza unghiulară instantanee, viteza punctului D_0, polul acceleraţiilor, acceleraţia punctului D_0.

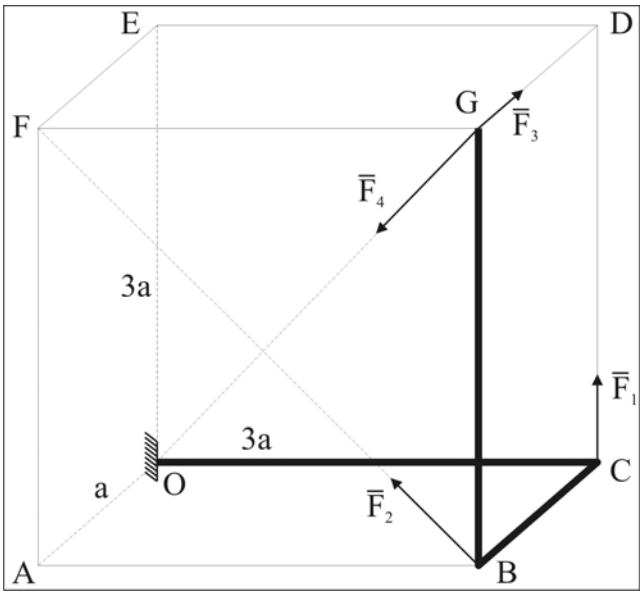


1. Reducerea unui sistem de forţe plane.
2. Variaţia momentelor de inerţie în raport cu axe paralele.
3. Se da sistemul de forţe care acţionează asupra barei cotite din figură. Forţele au modulele: $F_1= F$, $F_2=3F\sqrt{2}$, $F_3= F$, $F_4= F\sqrt{19}$.

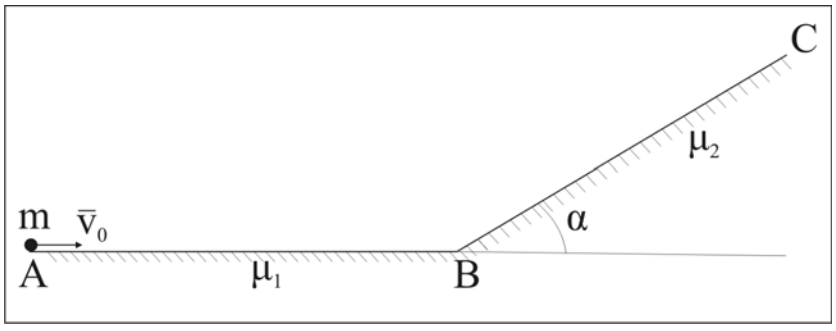
Se cer:

a. Torsorul de reducere in O

b. Ecuaţia axei centrale



4. Punctul material de masă m este lansat din A cu viteza v_0 pe un plan orizontal, coeficientul de frecare fiind μ_1, din punctul B punctul material urcă pe un plan înclinat cu unghiul α, coeficientul de frecare fiind μ_2. Se cunoaşte $AB=l_1$, $BC=l_2$. Să se determine: a) viteza în punctul B; b) legea de mişcare pe planul înclinat a punctului material; c) viteza în punctul C.

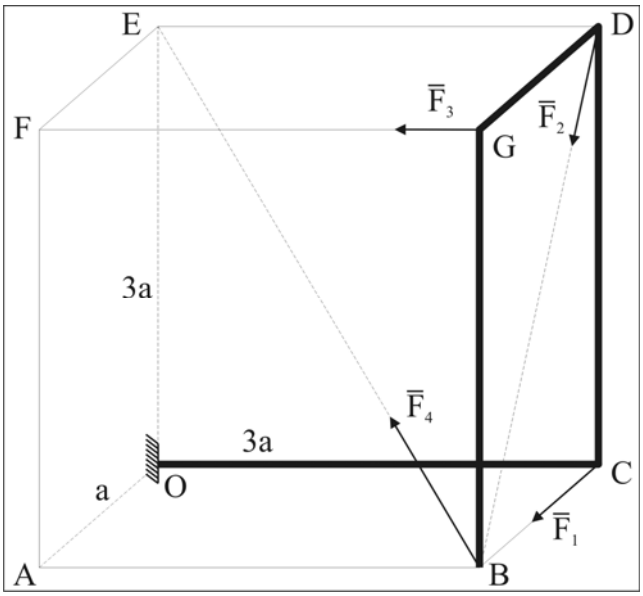


1. Reducerea unui sistem de forţe paralele.
2. Principiile mecanicii. Determinarea legii de mişcare a unui punct material pe baza legii fundamentale.
3. Se da sistemul de forţe care acţionează asupra barei cotite din figură. Forţele au modulele: $F_1= F$, $F_2= F\sqrt{10}$, $F_3= F$, $F_4= F\sqrt{19}$.

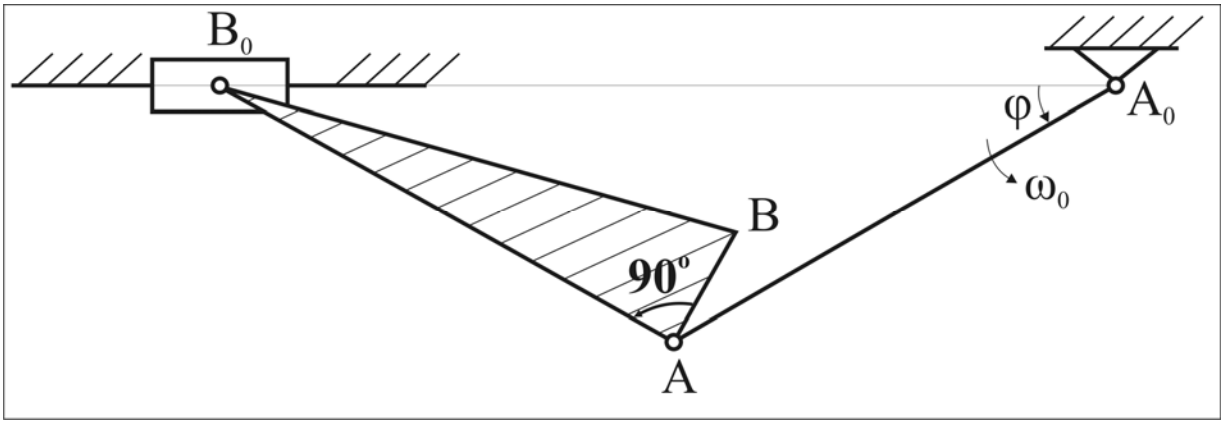
Se cer:

a. Torsorul de reducere in O

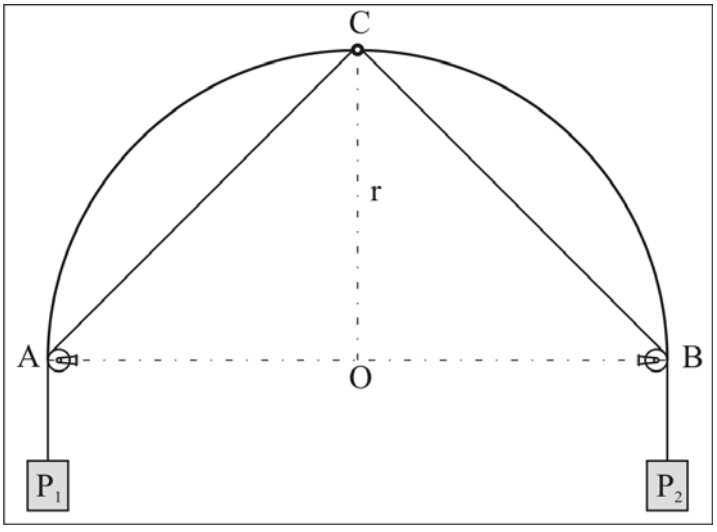
b. Ecuaţia axei centrale



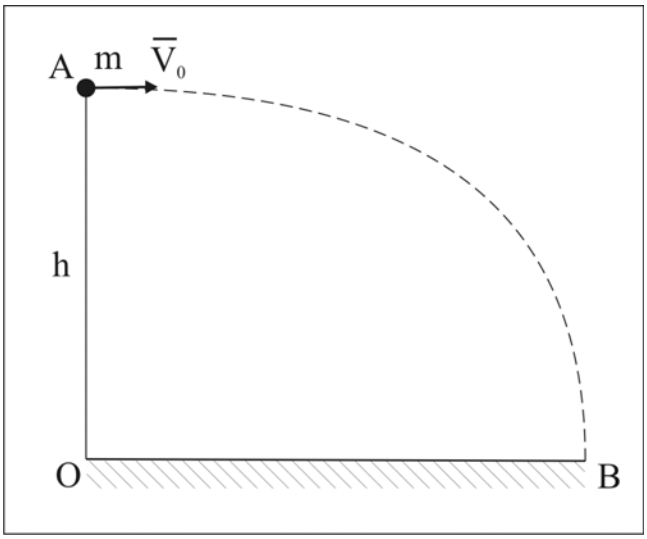
4. Se consideră mecanismul bielă manivelă din figură pentru care se cunosc $A_0A=AB_0=a$, $BB_0=b$, ω_0=constantă. Să se determine pentru bielă: poziţia centrului instantaneu de rotaţie, baza, rostogolitoarea, viteza unghiulară instantanee, viteza punctului B, polul acceleraţiilor, acceleraţia punctului B.



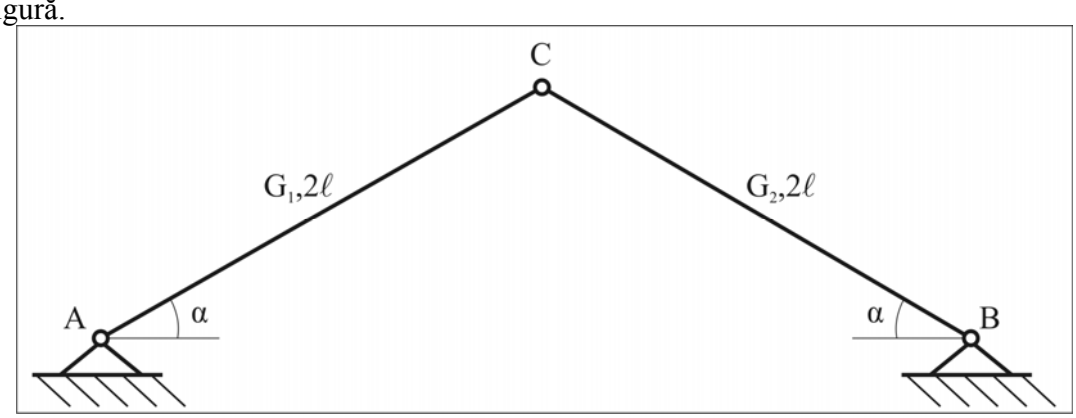
1. Echilibrul corpului liber.
2. Determinarea legii de mişcare a unui punct material folosind diferite sisteme de coordonate (cartezian, polar si intrinsec).
3. Un inel C de greutate neglijabilă se poate mişca cu frecare (coficientul de frecare μ) pe un semicerc de rază r. De inel sunt legate două fire trecute peste scripeţii A şi B. De fire sunt legate greutăţile P_1 şi P_2. Sa se determine raportul P_1/P_2 pentru ca inelul să fie în echilibru.



4. Un punct material de masă m este aruncat de la înălţimea h cu viteza orizontală v_0. Să se determine: a) legea de mişcare; b) distanţa OB; c) viteza în punctul B.

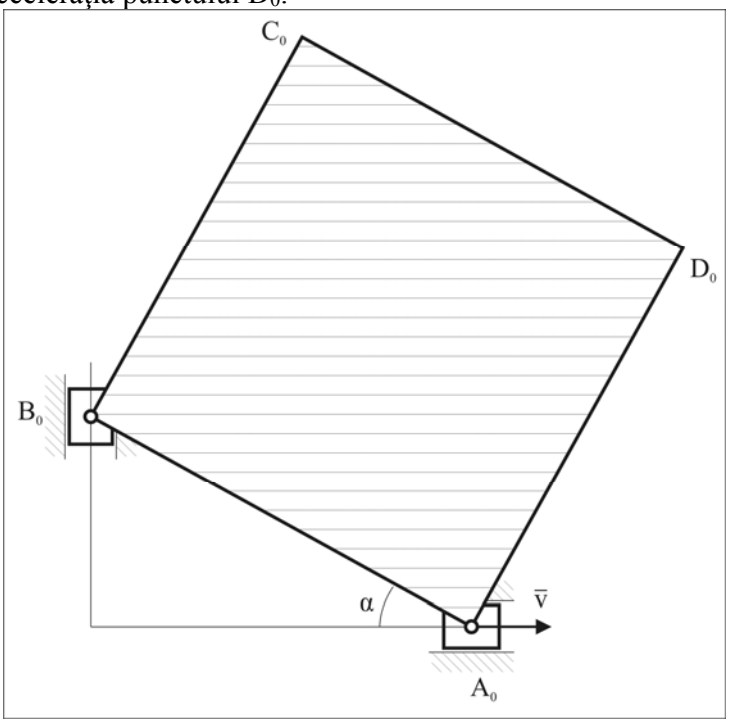


1. Echilibrul corpului supus la legături.
2. Mişcarea unui punct material sub acţiunea greutăţii proprii.
3. Să se determine reacţiunile din articulaţiile A, B, C, pentru poziţia de echilibru din figură.



4. Se consideră placa patrată $A_0B_0C_0D_0$ de latură l care se mişcă astfel încât capetele sale A_0 şi B_0 se deplasează după două direcţii perpendiculare, capătul A_0 deplasându-se cu viteza constantă v Să se determine pentru placă: poziţia centrului instantaneu de rotaţie,

baza, rostogolitoarea, viteza unghiulară instantanee, viteza punctului D_0, polul acceleraţiilor, acceleraţia punctului D_0.

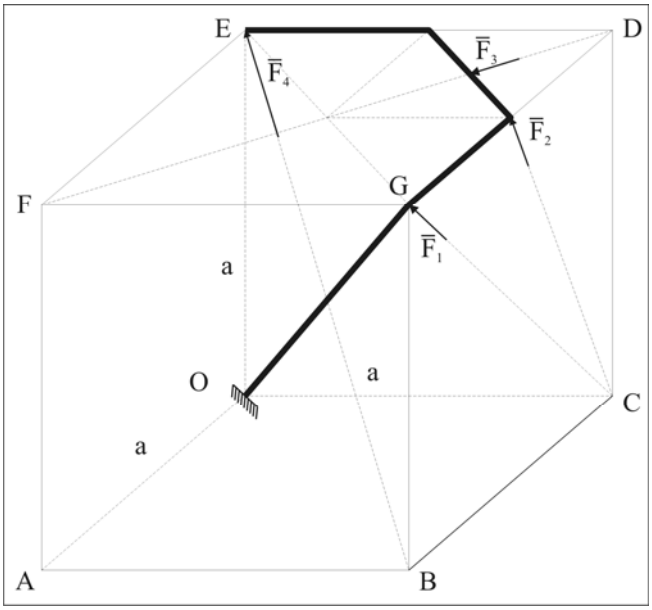


1. Rezemarea.
2. Mişcarea verticală.
3. Se da sistemul de forţe care acţionează asupra barei cotite din figură. Forţele au modulele $F_1= F\sqrt{2}$, $F_2= F\sqrt{5}$, $F_3= F\sqrt{2}$, $F_4= F\sqrt{3}$.

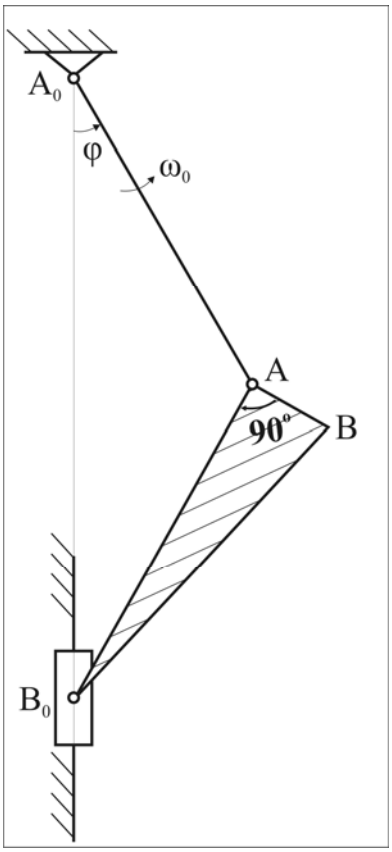
Se cer:

a. Torsorul de reducere in O

b. Ecuaţia axei centrale



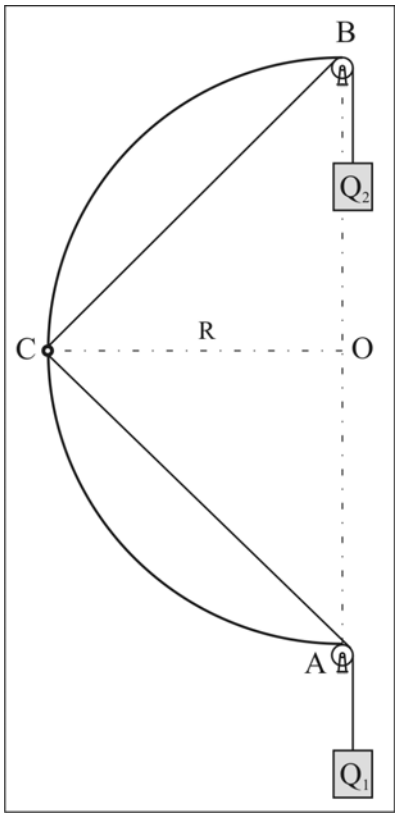
4. Se consideră mecanismul bielă manivelă din figură pentru care se cunosc $A_0A=AB_0=a$, $BB_0=b$, ω_0=constantă. Să se determine pentru bielă: poziţia centrului instantaneu de rotaţie, baza, rostogolitoarea, viteza unghiulară instantanee, viteza punctului B, polul acceleraţiilor, acceleraţia punctului B.



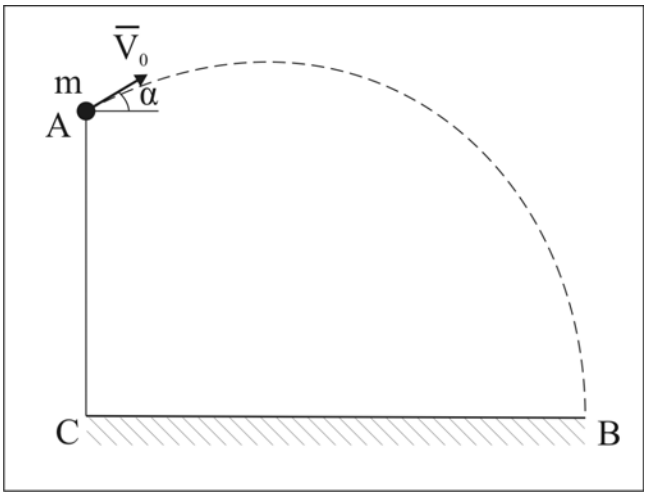
1. Articulaţia.

2. Aruncarea oblică.

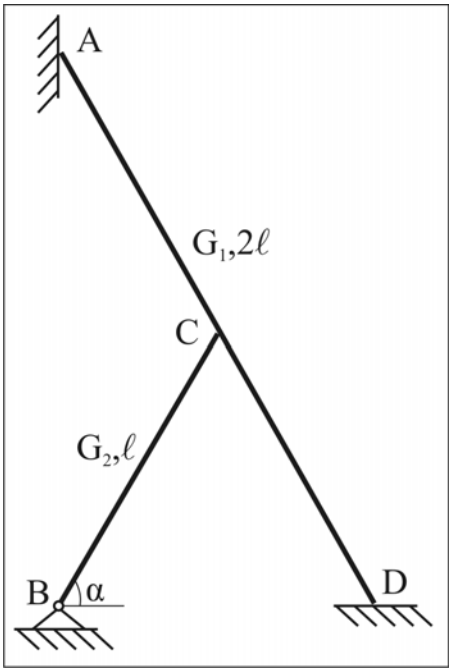
3. Un inel C de greutate neglijabilă se poate mişca cu frecare (coficientul de frecare μ) pe un semicerc de rază R. De inel sunt legate două fire trecute peste scripeţii A şi B. De fire sunt legate greutăţile Q_1 şi Q_2. Sa se determine raportul Q_1/Q_2 pentru ca inelul să fie în echilibru.



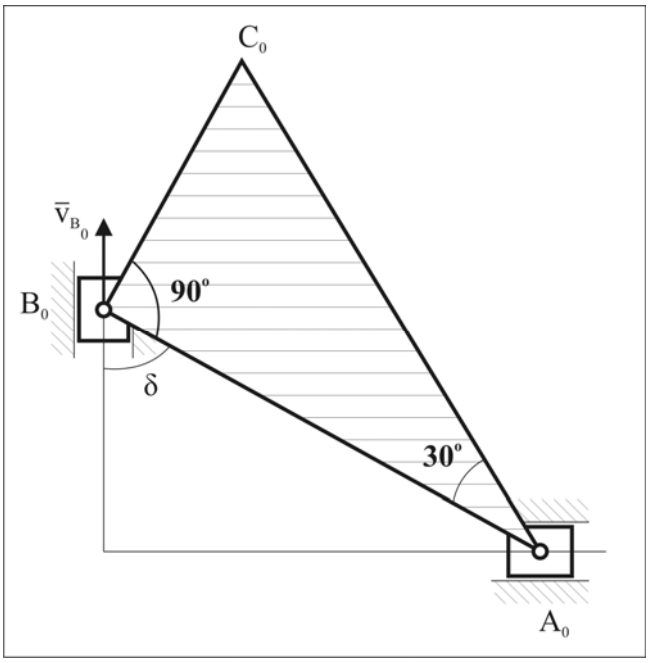
4. Un punct material de masă m este aruncat cu viteza iniţială v_0 înclinată cu unghiul α faţă de orizontală. Să se determine: a) legea de mişcare; b) distanţa CB; c) viteza în punctul B.



1. Încastrarea.Legătura cu fir.
2. Impulsul unui punct material. Teorema impulsului.
3. Să se determine reacţiunile din articulaţia B şi reazemele A, C şi D pentru poziţia de echilibru din figură. Se dau: AC=CD=BC=l.



4. Se consideră placa triunghiulară $A_0B_0C_0$ de latură a care se mişcă astfel încât capetele sale A_0 şi B_0 se deplasează după două direcţii perpendiculare, capătul B_0 deplasându-se cu viteza constantă v_{B_0} Să se determine pentru placă: poziţia centrului instantaneu de rotaţie, baza, rostogolitoarea, viteza unghiulară instantanee, viteza punctului C_0, polul acceleraţiilor, acceleraţia punctului C_0.

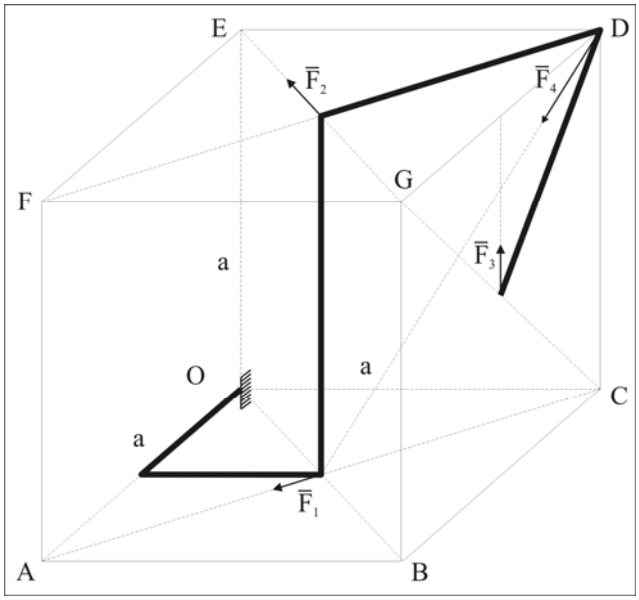


1. Centrul de greutate al unui sistem de puncte materiale.
2. Momentul cinetic al unui punct material. Teorema momentului cinetic.
3. Se da sistemul de forţe care acţionează asupra barei cotite din figură. Forţele au modulele $F_1= F\sqrt{2}$, $F_2= F\sqrt{2}$, $F_3= F$, $F_4= F\sqrt{6}$.

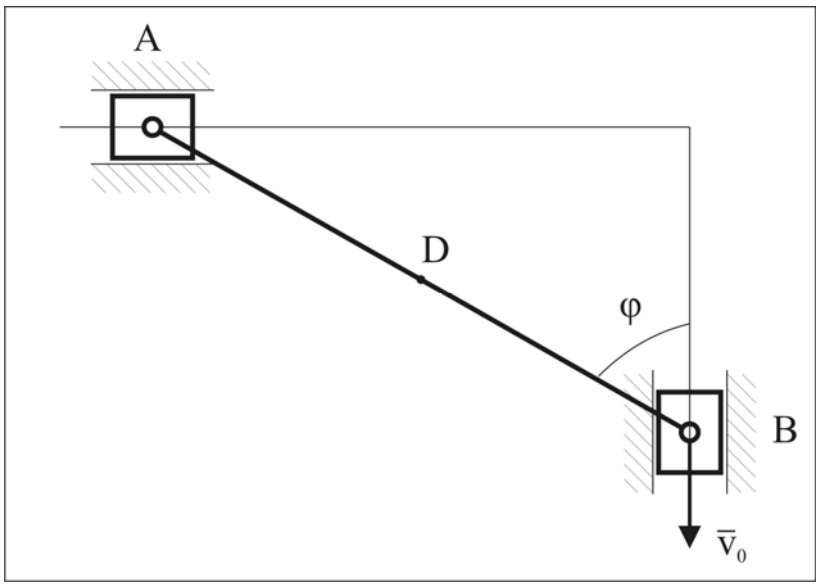
Se cer:

a. Torsorul de reducere in O

b. Ecuaţia axei centrale

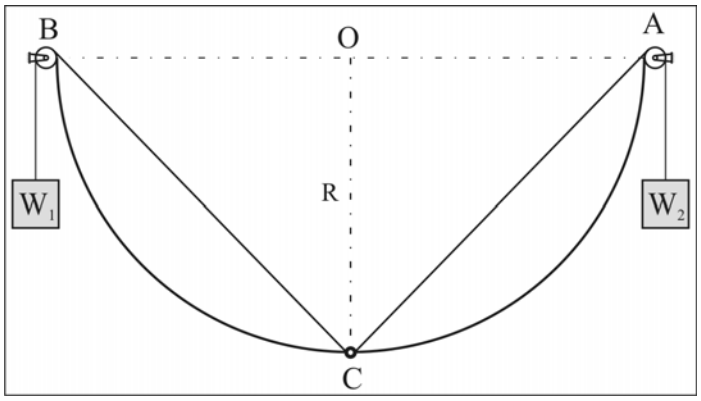


4. Se consideră bara AB de lungime 2a care se mişcă astfel încât capetele sale A şi B se deplasează după două direcţii perpendiculare, capătul B deplasându-se cu viteza constantă v_0 Să se determine pentru bara AB: poziţia centrului instantaneu de rotaţie, baza, rostogolitoarea, viteza unghiulară instantanee, viteza punctului D, polul acceleraţiilor, acceleraţia punctului D.

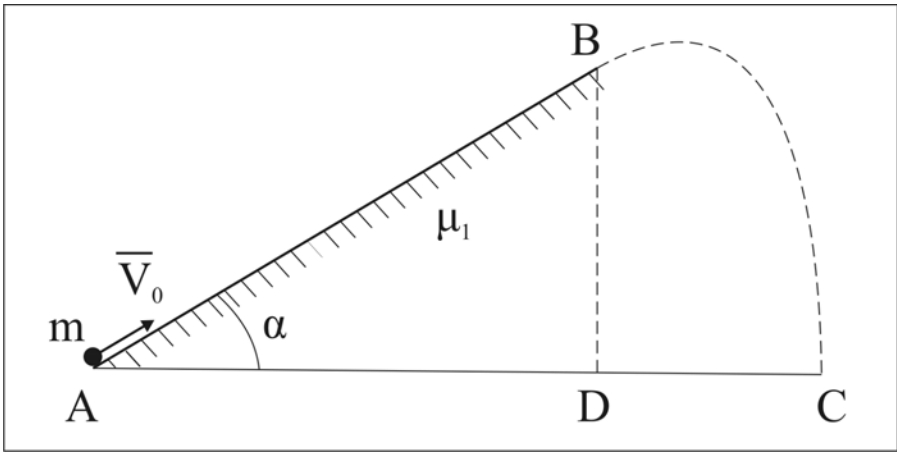


1. Centrul de greutate al unui sistem material continuu.

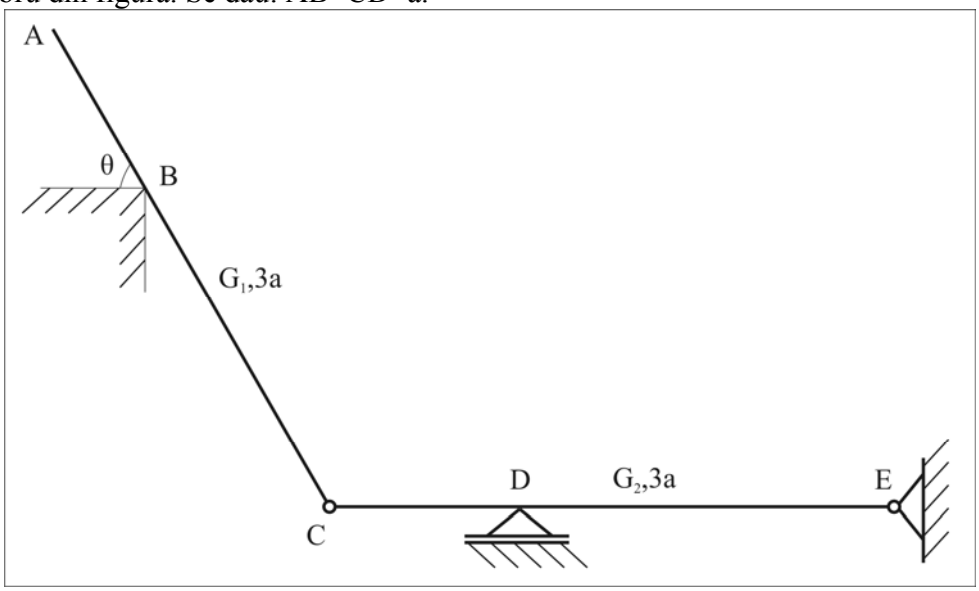
2. Lucrul mecanic al unei forte constante si al unei forte variabile.
3. Un inel C de greutate neglijabilă se poate mişca cu frecare (coficientul de frecare μ) pe un semicerc de rază R. De inel sunt legate două fire trecute peste scripeţii A şi B. De fire sunt legate greutăţile W_1 şi W_2. Sa se determine raportul W_1/W_2 pentru ca inelul să fie în echilibru.



4. Punctul material de masă m este lansat din A cu viteza v_0 pe planul înclinat cu unghiul α, coeficientul de frecare fiind μ, din punctul B cade liber ajungând în C. Se cunoaşte lungimea planului AB=a. Să se determine: a) legea de mişcare pe planul înclinat a punctului material; b) viteza în punctul B; c) viteza în punctul C.



1. Centrul de greutate al unui corp format din mai multe componente (subsisteme).
2. Energia cinetica. Energia potentiala. Teorema energiei cinetice.
3. Să se determine reacţiunile din articulaţia B şi reazemele A, C şi D pentru poziţia de echilibru din figură. Se dau: AB=CD=a.



4. Se consideră mecanismul bielă manivelă din figură pentru care se cunosc $A_0A=AB_0=a$, $BB_0=b$, ω_0=constantă. Să se determine pentru bielă: poziţia centrului instantaneu de rotaţie, baza, rostogolitoarea, viteza unghiulară instantanee, viteza punctului B, polul acceleraţiilor, acceleraţia punctului B.

BIBLIOGRAFIE

1. L. BERETEU, I. SMICALĂ, *Mecanică – Dinamica şi aplicaţii*, Editura Mirton, Timişoara, 1992.
2. L. BRINDEU, *Vibraţii*, Lit. Inst. Politehnica "Traian Vuia", Timişoara, 1979.

3. GH. BUZDUGAN, L. FETCU, M. RADES, *Vibraţiile sistemelor mecanice*, Editura Academiei, 1975.
4. R. R. CRAIG, *Structural dynamics*; *John Wiley and Sons*, 1981.
5. R.R.CRAIG , A. Kurdila, *Fundamentals of structural dynamics*, *John Wiley and Sons*, 2006
6. B. P. DEMIDOVICH, I. A. MARON, *Computational Mathematics*, Mir Publishers, 1981.
7. P. HAGEDORN, *Non – Linear Oscillations* – clarendon Press – Oxford, 1988.
8. M. HUSSEY, *Fundamentals of Mechanical Vibrations*, Mac Millan Press Ltd., 1983.
9. M. LALANNE şi alţii, *Mechanical Vibrations for Engineers*, John Wiley and Sons Ltd.,1984.
10. N. LEVITSKII, *Kolebania v mehanizmah*, Nauka Moskva, 1988.
11. L. MEIROVITCH, *Elaments of Vibration Analysis*, Mc. Graw – Hill, New York, 1975.
12. L. MEIROVITCH, *Computational Methods in Structural Dynamics*, Syhoff – Noordhoff, The Netherlands, 1980.
13. L. MEIROVITCH, *Introduction to Dynamics and Control*, John Wiley and Sons, New York, 1988.
14. L. MEIROVITCH, *Fundamentals of Vibration, McGraw-Hill*, New York, 2001
15. S. RAO, *The Finite Element Method in Engineering*, Pergamon Press, 1982.
16. W. SATO, *Theory and Problems of Mechanical Vibrations*, Schaum, Publishing, New York, 1964.
17. GH. SILAS, *Mecanică. Vibraţii mecanice*, Ed. Didactică şi Pedagogică, 1968.
18. GH. SILAS, L. BRINDEU, A. HEGEDUS, *Culegere de probleme de Vibraţii mecanice,* Ed. Tehnică, Bucureşti, 1967.
19. I. SMICALĂ, L. BERETEU, A. TOCARCIUC Exercitii si probleme *de mecanică si vibratii*, Editie electronica, 2010.
20. W. T. THOMSON, *Theory of Vibration*, Uhwin Hyman Ltd. London, 1989.
21. W.T. THOMSON *The Theory of Vibration with Applications*, Taylor&Francis Ltd., 1996
22. A. C. WALSHAW, *Mechanical Vibrations with Applications*, Ellis Horwood Ltd., 1984.